IL PROBLEMA DEL QUADRATO OPACO

EUGENIO MONTEFUSCO, MARCELLO PONSIGLIONE & EMANUELE SPADARO
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA - SAPIENZA UNIVERSITÀ DI ROMA
PIAZZALE ALDO MORO 5, 00185 ROMA

Consideriamo nel piano $\mathbb{R}^2$ un quadrato Q (l'unione della regione interna ai quattro lati e dei lati stessi) avente lato di lunghezza 1, e poniamoci la seguente domanda

Problema del quadrato opaco: È possibile trovare il più "economico" sottoinsieme $K \subseteq Q$ che rende opaco il quadrato, cioè che intercetta ogni retta del piano passante per qualche punto di Q.

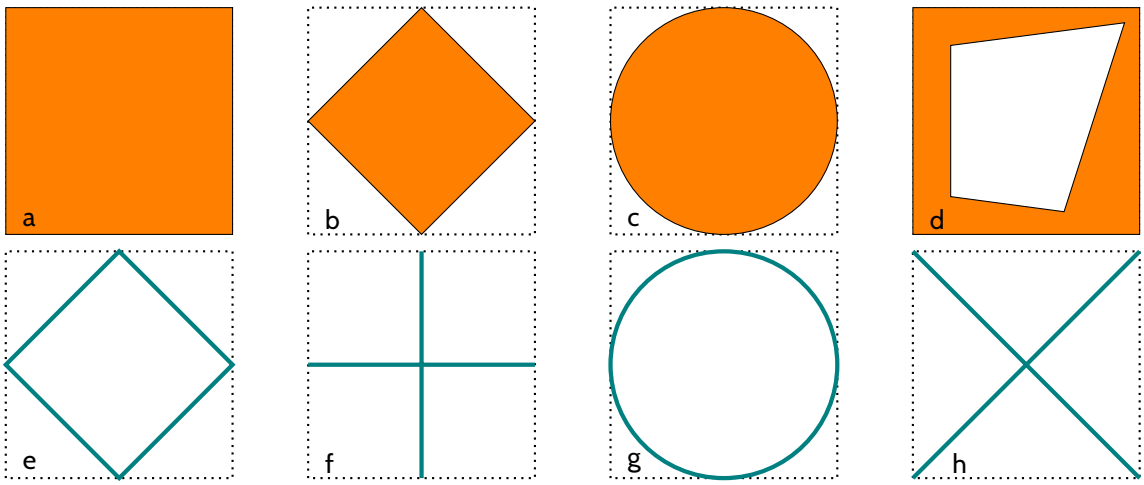
Attività 1: riconoscere barriere

Definizione. $K \subseteq Q$ è una barriera se interseca tutte le rette che intersecano Q, in formule

per ogni retta r tale che $r \cap Q \neq \emptyset$ allora $r \cap K \neq \emptyset$

Esercizio 1. Prova a convincerti che l'espressione matematica contenuta nella precedente definizione asserisce la stessa cosa della frase in italiano.

Come prima attività cerchiamo di capire quali insiemi K tra i seguenti (riconoscibili perché colorati), sono delle barriere per il quadrato



Esercizio 2. Guardando i primi casi analizzati tenta di dare un senso matematico all'aggettivo "economico" contenuto nel testo del problema del quadrato opaco. Confronta la tua idea con quella di un collega e cercate insieme di produrre una sintesi delle vostre idee.

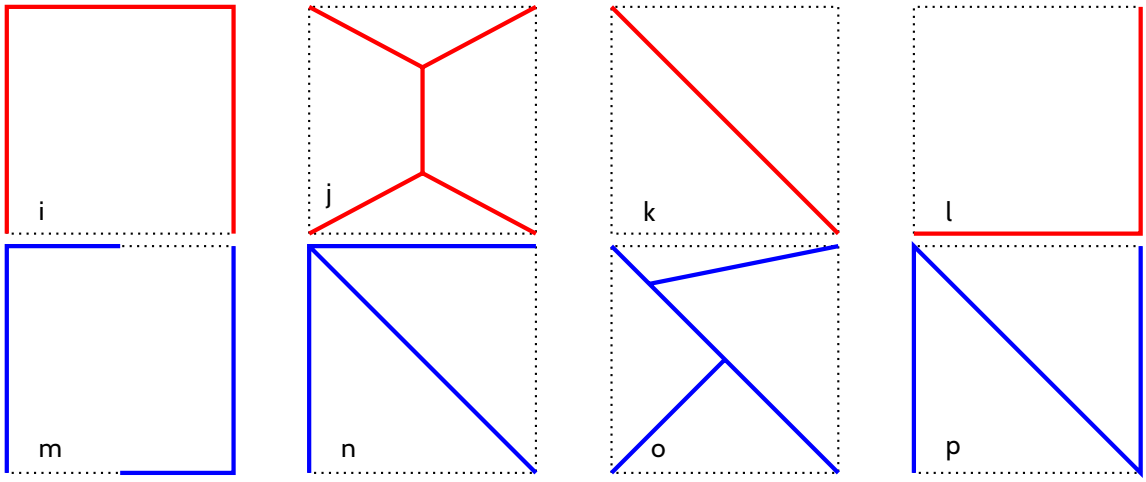
Esercizio 3. È possibile costruire una barriera fatta solo di punti scollegati tra loro?

Date: $\varepsilon(\mu)$-20 febbraio 2024.

Esercizio 4. Quali punti devono necessariamente appartenere ad una barriera?

Esercizio 5. Supponiamo di cercare una barriera capace di intercettare una qualsiasi curva passante per il quadrato (e non solo rette!): sei in grado di immaginare come dovrebbe essere fatta una tale barriera?

Cerchiamo di capire quali insiemi K tra i successivi sono delle altre barriere per il quadrato



Esercizio 6. Prova a disegnare altre quattro barriere.

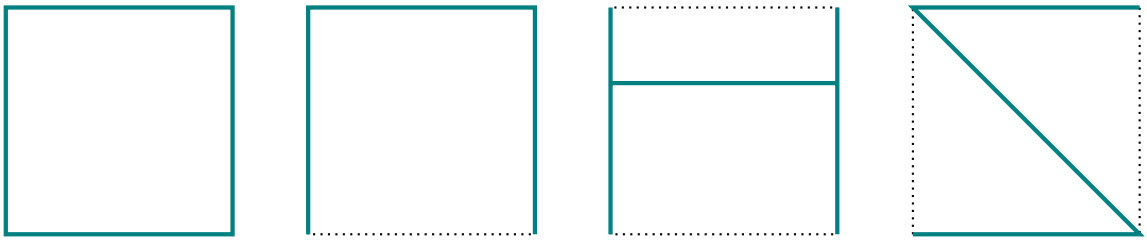
Esercizio 7. Perché le barriere precedenti non contengono archi curvi? Riesci a disegnare una barriera composta solo da tratti curvi?

Esercizio 8. Quali tra le lettere dell'alfabeto (opportunamente riportate nel quadrato Q) costituiscono una barriera?

Esercizio 9. Dimostra la seguente affermazione: sia $p \in Q$ un punto qualsiasi l'unione dei quattro segmenti che uniscono p ai vertici del quadrato è una barriera. Tra tutte le barriere ottenute in questo modo quella di lunghezza minima è ottenuta scegliendo p come il punto comune alle diagonali del quadrato.

Attività 2: calcolare la lunghezza di una barriera

Dopo esserci convinti che è molto sensato richiedere che la barriera K sia "sostanzialmente" un oggetto unidimensionale e rettilineo e che il nostro desiderio di economicità corrisponda alla richiesta che tale barriera sia di lunghezza più piccola possibile, cerchiamo di calcolare la lunghezza degli insiemi rappresentati nelle figure che seguono, in modo da orientarci verso barriere più economiche possibile.



Esercizio 10. Prova a disegnare quattro barriere aventi lunghezza maggiore di 4.

Esercizio 11. Prova a disegnare quattro barriere aventi lunghezza maggiore di 3.

Esercizio 12. Prova a disegnare quattro barriere aventi lunghezza minore di 2.

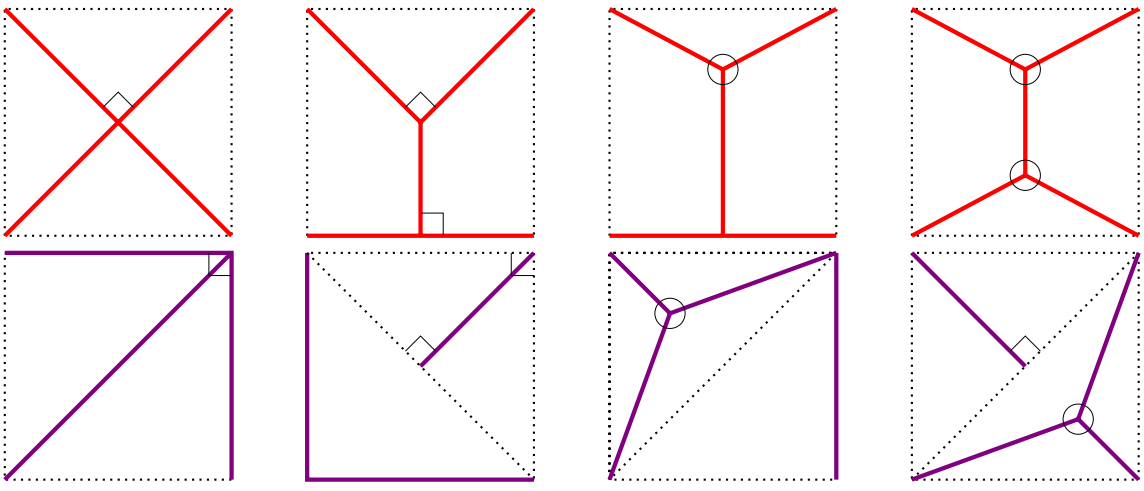
Esercizio 13. Prova che non esistono barriere di lunghezza minore di 1. Cosa è possibile dire riguardo barriere di lunghezza minore di 2?

Esercizio 14. Prova a disegnare una barriera di lunghezza compresa tra 2.5 e 3.

Esercizio 15. Prova a mostrare che, per ogni $k \in [3, +\infty)$, esiste una barriera di lunghezza uguale a k. Cosa implica questa osservazione riguardo l'esistenza di una barriera di lunghezza massima?

Attività 3: cercando la barriera migliore

Le ultime proposte di questo laboratorio consistono nel calcolare e confrontare le lunghezze delle seguenti barriere, in modo da individuare la più corta.



Esercizio 16. Cerca di costruire una barriera avente lunghezza maggiore di 3 formata da 3 parti separate. È possibile costruire barriere formate da un numero arbitrario di componenti?

Gli utlimi esercizi (ma anche qualcuno dei precedenti...) sono molto molto difficili, non ti scoraggiare se non riesci a risolverli tutti!

Esercizio 17. Cerca di costruire una barriera avente lunghezza minore di 3 formata da 3 parti separate.

Esercizio 18. Cerca di costruire una barriera avente lunghezza minore di 2.5 formata da 3 o più parti separate.

Esercizio 19. Proponi un enunciato (senza dimostrazione) che riassuma le tue riflessioni riguardo al problema del quadrato opaco.

Esercizio 20. Prova a dimostrare il precedente enunciato...

Attività extra: l'albero di Steiner

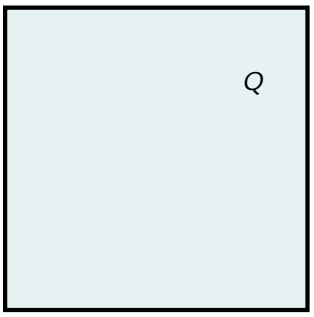
Un celebre risultato legato agli argomenti che abbiamo discusso brevemente in queste pagine è il seguente teorema, dovuto al matematico svizzero Jakob Steiner ((Utzenstorf 17960318, Berna 18630401)

Teorema. *Dato un triangolo $T \subseteq \mathbb{R}^2$ di vertici A, B e C, si trovi il punto $P \in T$ che rende più piccola possibile (minima) la quantità $\overline{AP} + \overline{BP} + \overline{CP}$.*

Esercizio 21. Prova a dimostrare il precedente teorema di Steiner.

Discussione degli esercizi e approfondimenti teorici

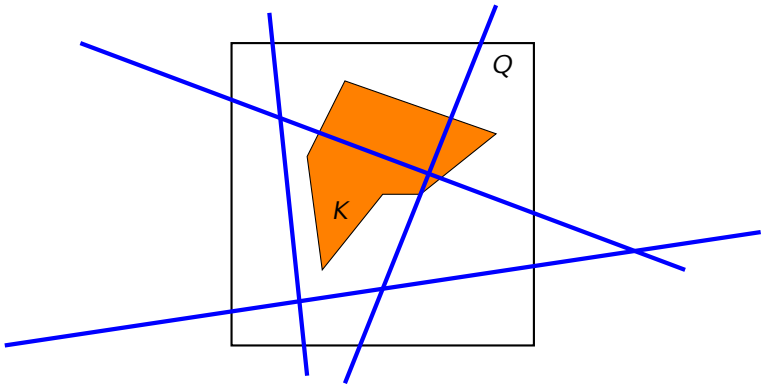
Queste note vogliono proporre un problema di matematica relativamente semplice da presentare, ma molto impegnativo da risolvere: infatti, al momento, si tratta di un problema aperto, una congettura da dimostrare.



Supponiamo di avere una regione piana $Q \subseteq \mathbb{R}^2$ avente forma di un quadrato come nella figura a lato (per quadrato intendiamo sia la regione circoscritta dai quattro lati che i lati stessi!). Possiamo pensare che abbia lato di lunghezza $L = 1$ per fissare le idee e per i conti che seguiranno, ma questo fatto non sarà rilevante nella discussione.
Lo scopo delle attività che seguono è, innanzitutto, capire meglio il problema e apprezzare i ragionamenti che ne scaturiranno, familiarizzare con alcuni concetti geometrici del piano, in ultimo (ma non per importanza!) scoprire problemi matematici **tuttora** irrisolti, su cui alcuni studiosi lavorano e di cui non si conosce ancorala soluzione, in modo da mostrare qualcosa della ricerca matematica attuale.

Problema del quadrato opaco: È possibile trovare il più "economico" sottoinsieme $K \subseteq Q$ che rende opaco il quadrato, cioè che intercetta ogni retta del piano passante per qualche punto di Q?

Nella seguente figura è rappresentato il quadrato Q, un suo sottoinsieme K e alcune rette (ovviamente solo un tratto!) passanti per Q: si osservi che l'insieme K nella figura non riesce a rendere opaco il quadrato, poiché alcune rette passanti per Q non hanno intersezione con K.



Il laboratorio è strutturato come una serie di attività di carattere più o meno pratico in cui si chiede di verificare una definizione, di calcolare e confrontare alcune quantità o di riflettere su alcuni aspetti meno evidenti del problema. Nelle pagine successive riporteremo alcune discussioni per rispondere ai quesiti precedenti, intervallate da momenti di riflessione di carattere più astratto. Per praticità alcune dimostrazioni saranno accennate o prive di qualche dettaglio o taceranno qualche questione decisamente troppo sottile per i nostri scopi...

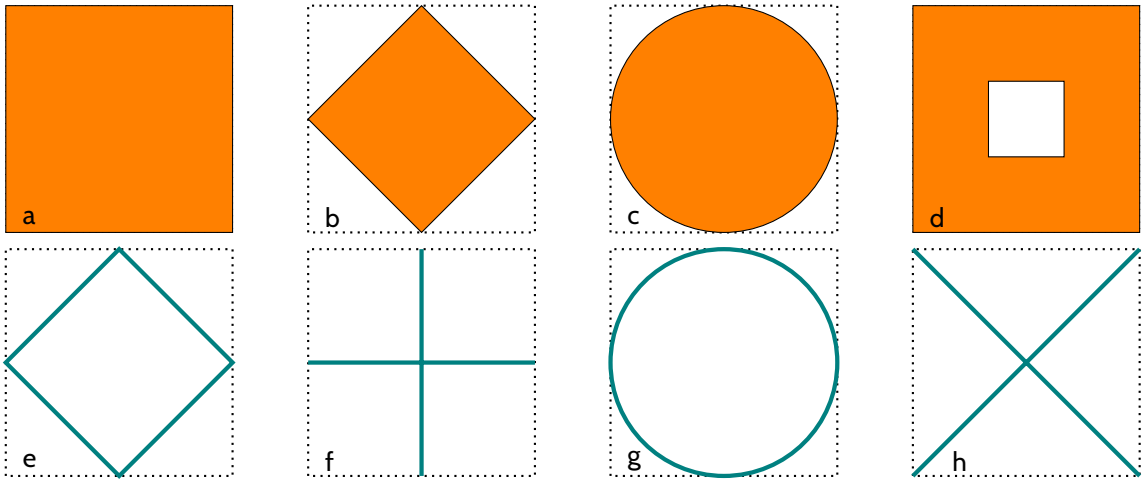
Attività 1: riconoscere barriere

Definizione. $K \subseteq Q$ è una barriera se interseca tutte le rette che intersecano Q, in formule

per ogni retta r tale che $r \cap Q \neq \emptyset$ allora $r \cap K \neq \emptyset$

Esercizio 1. Prova a convincerti che l'espressione matematica contenuta nella precedente definizione asserisce la stessa cosa della frase in italiano.

Come prima attività cerchiamo di capire quali insiemi K tra i seguenti (riconoscibili perché colorati), sono delle barriere per il quadrato di cui fanno parte



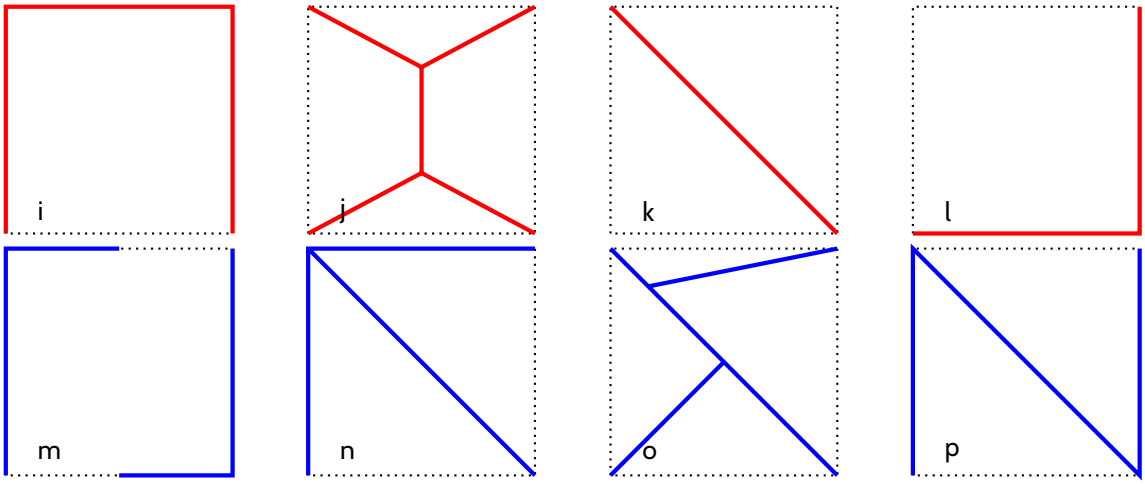
Esercizio 2. Guardando i primi casi analizzati tenta di dare un senso matematico all'aggettivo "economico" contenuto nel testo del problema del quadrato opaco. Confronta la tua idea con quella di un collega e cercate insieme di produrre una sintesi delle vostre idee.

Esercizio 3. È possibile costruire una barriera fatta solo di punti scollegati tra loro?

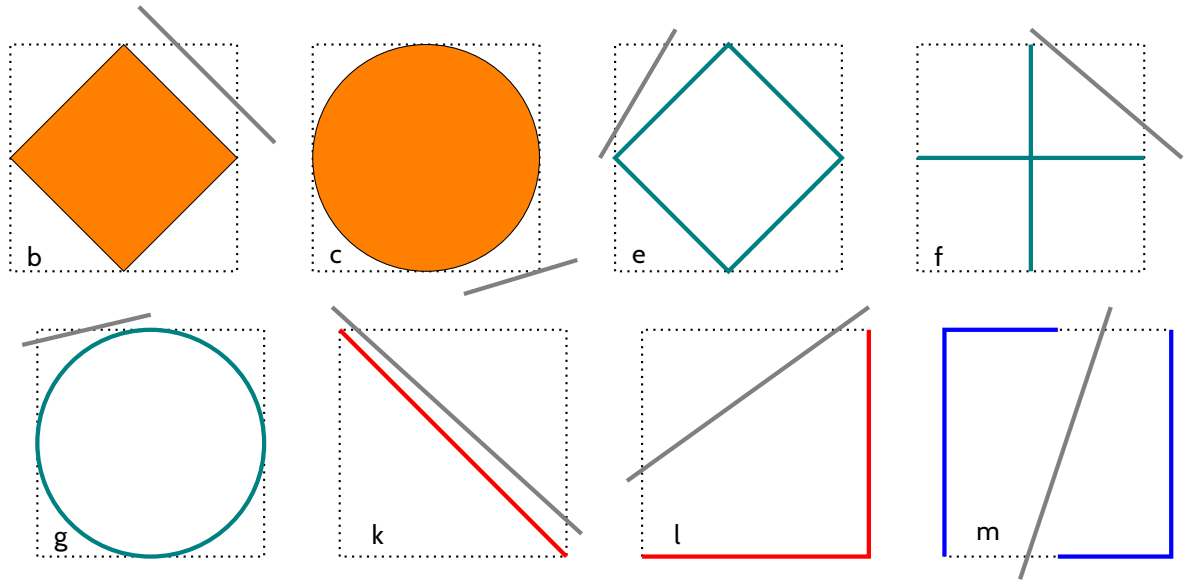
Esercizio 4. Quali punti devono necessariamente appartenere ad una barriera?

Esercizio 5. Supponiamo di cercare una barriera capace di intercettare una qualsiasi curva passante per il quadrato (e non solo rette!): sei in grado di immaginare come dovrebbe essere fatta una tale barriera?

Cerchiamo di capire quali insiemi K tra i successivi sono delle altre barriere per il quadrato



La definizione di barriera cerca di identificare un sottoinsieme che possiede una proprietà molto particolare: ogni retta che passa per il quadrato (cioè che ha punti in comune con il quadrato) deve avere punti in comune (non gli stessi!) con la barriera.
Come sempre in matematica le risposte negative, cioè mostrare che un insieme proposto non è una barriera è semplice, poiché è sufficiente mostrare una retta che interseca Q e che non interseca l'insieme colorato, più impegnativo è provare la proprietà di barriera per un certo K.
Cominciamo immediatamente con lo svelare gli insiemi che non sono barriere, mostrando (in grigio) un tratto di una retta che interseca il quadrato ma non la (falsa) barriera.



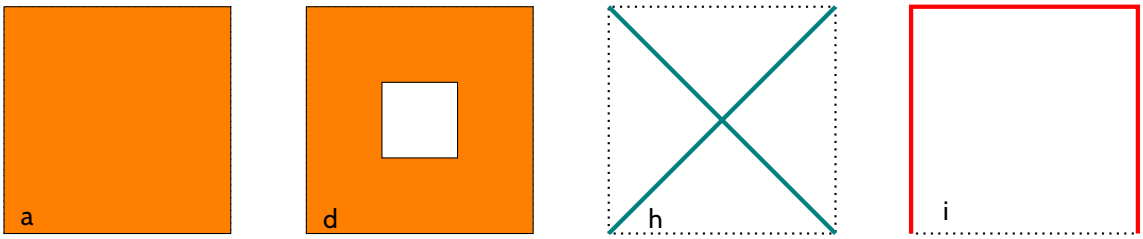
Esercizio 6. Prova a disegnare altre quattro barriere.

Esercizio 7. Perché le barriere precedenti non contengono archi curvi? Riesci a disegnare una barriera composta solo da tratti curvi?

Esercizio 8. Quali tra le lettere dell'alfabeto (opportunamente riportate nel quadrato Q) costituiscono una barriera?

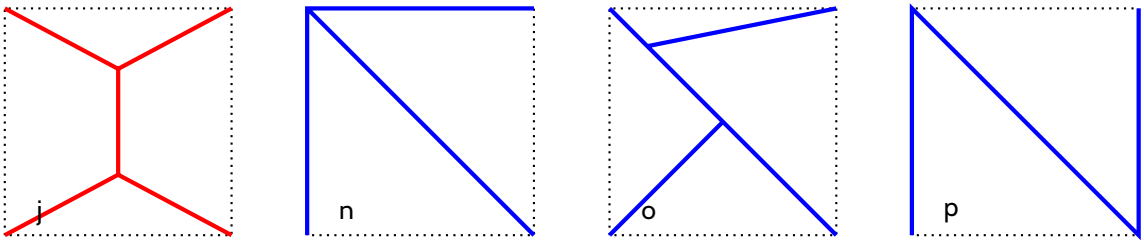
Esercizio 9. Dimostra la seguente affermazione: sia $p \in Q$ un punto qualsiasi l'unione dei quattro segmenti che uniscono p ai vertici del quadrato è una barriera. Tra tutte le barriere ottenute in questo modo quella di lunghezza minima è ottenuta scegliendo p come il punto comune alle diagonali del quadrato.

Sottolineiamo che una barriera, dovendo bloccare **tutte** le rette secanti il quadrato, deve (in particolare) contenere i 4 vertici del poligono regolare, altrimenti non riuscirebbe a bloccare una retta come nel caso c precedente. Questo perché la barriera è un sottoinsieme contenuto nel quadrato ed esistono rette passanti per un vertice che hanno in comune solo il vertice stesso con il quadrilatero.
L'osservazione appena fatta non è, però, sufficiente a caratterizzare una buona barriera: il caso m ci mostra che bisogna fare in modo che la barriera intercetti tutti i vertici e anche ogni segmento che ha i due estremi su lati differenti del quadrato. Si noti che questo ragionamento ci permette di dedurre che l'unione dei quattro lati che compongono il bordo della figura costituiscono una buona barriera.



L'insieme arancone nella fugura a è chiaramente una barriera, perché in questo caso vale $Q = K$, quindi se una retta interseca il quadrato automaticamente interseca la barriera.
La figura d è ugualmente una buona bariera, in quanto ogni retta che ha punti in comune con il quadrato, in particolare, deve intersecare uno dei lati e l'insieme K in questo caso contiene tutti i quattro lati del quadrilatero. Si noti che il ragionamento appena fatto ci permette di concludere che anche l'insieme K' costituito dai quattro lati di Q è una barriera e questo ci permette di precisare qual è il concetto di economicità a cui il problema

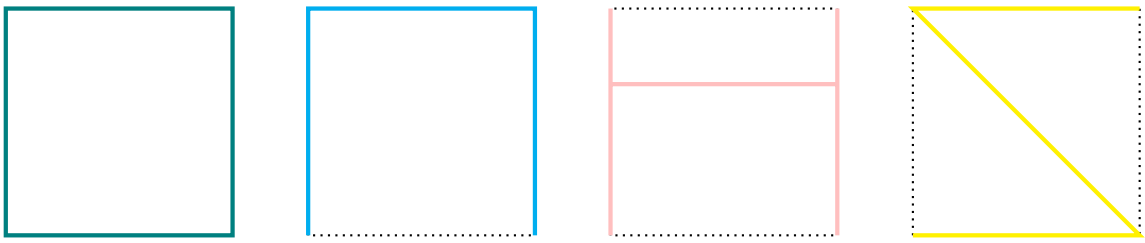
del quadrato opaco fa riferimento: questi ultimi ragionamenti mostrano che non è necessario che la barriera abbia un'area, quindi ci concentreremo nel cercare un oggetto che sia un'unione di segmenti la cui somma delle lunghezze sia più piccola possibile.
A questo punto possiamo discutere gli insiemi h e i. Entrambi sono delle barriere perché se l'intersezione tra la retta e il quadrato è un segmento con estremi su due lati differenti deve necessariamente incontrare le diagonali che formano h o almeno uno dei tre lati che costituiscono la barriera i. Se l'intersezione non ha estremi su lati diversi significa che l'intersezione è un vertice o un lato intero: in entrambi i casi sia h che i intercettano in almeno un punto la retta rendendo il quadrato opaco.
A questo punto non resta che affrontare le quattro situazioni rimanenti, precisamente i casi j, n, o e p. Sottolineiamo subito che il precedente ragionamento prova immediatamente che n e p sono delle barriere, infatti (come detto) l'intersezione tra una qualsiasi retta e il quadrato (se non è l'insieme vuoto) è un vertice, un lato o un segmento avente gli estremi su due lati distinti ed è evidente che le figure n e p sono delle barriere, perché contengoo i quattro vertici (coprendo così le prime due possibilità), mentre il caso del segmento con estremi su due lati viene coperto dal fatto che o un suo estremo si trova sulla barriera o il segmento deve intersecare la diagonale.
Gli ultimi due casi (j e p) si discutono in modo simile: come prima i quattro vertici appartengono alle barriere, invece i segmenti con estremi su lati differenti intersecano necessariamente uno dei segmenti dell'insieme (una dimostrazione rigorosa di questa affermazione è possibile grazie al teorema di Jordan, si veda, per esempio, [2] paragrafi 14.3 e 17.1).



La morale di questa prima attività è di essere riusciti a riconscere che una barriera "ottimale" non deve essere un insieme dotato di area, ma un'unione di curve (anzi segmenti) che gode di alcune proprietà geometriche ben precise: contenere i vertici e intercettare i segmenti con estremi su lati differenti.
Nelle prossime pagine ci dedicheremo alla ricerca di barriere economiche, nel senso di cercare barriere la cui lunghezza totale (cioè la somma delle lunghezze dei segmenti di cui sono composte) è più piccola possibile.

Attività 2: calcolare la lunghezza di una barriera

Dopo esserci convinti che è molto sensato richiedere che la barriera K sia "sostanzialmente" un oggetto unidimensionale e che il nostro desiderio di economicità corrisponda alla richiesta che tale barriera sia di lunghezza minima, cerchiamo di calcolare la lunghezza degli insiemi rappresentati nelle figure che seguono, in modo da comprendere meglio quali barriere siano più economiche di altre.



Questo primo esercizio di calcolo di lunghezze di barriere è abbastanza facile. Nel primo caso la barriera è composta dei quattro lati del quadrato, quindi la sua lunghezza è 4.
La barriera nella seconda figura è l'unione di tre lati di Q, fermo restando che è ininfluente quale dei quattro lati non appartenga alla barriera (di fatto il problema è invariante per rotazioni) è semplice dedurre che questa barriera ha lunghezza 3, che è la lunghezza anche della terza barriera, visto che uno dei lati è semplicemente traslato all'interno del quadrato.
La barriera gialla è l'unione di due lati e una diagonale, la sua lunghezza è $2+\sqrt{2} \approx 3,4142$, confrontando le lunghezze ottenute abbiamo che

$$3 < 2+\sqrt{2} < 4$$

Per ora la migliore bariera che abbiamo è (indifferentemente) la barriera celeste o la barriera rosa. Nella prossima attvità miglioreremo i nostri risultati.

Esercizio 10. Prova a disegnare quattro barriere aventi lunghezza maggiore di 4.

Esercizio 11. Prova a disegnare quattro barriere aventi lunghezza maggiore di 3.

Esercizio 12. Prova a disegnare quattro barriere aventi lunghezza minore di 2.

Esercizio 13. Prova che non esistono barriere di lunghezza minore di 1. Cosa è possibile dire riguardo barriere di lunghezza minore di 2?

Esercizio 14. Prova a disegnare una barriera di lunghezza compresa tra 2.5 e 3.

Esercizio 15. Prova a mostrare che, per ogni $k \in [3, +\infty)$, esiste una barriera di lunghezza uguale a k. Cosa implica questa osservazione riguardo l'esistenza di una barriera di lunghezza massima?

Attività 3: cercando la barriera migliore

Esercizio 16. Cerca di costruire una barriera avente lunghezza maggiore di 3 formata da 3 parti separate. È possibile costruire barriere formate da un numero arbitrario di componenti?

Gli ultimi esercizi (ma anche qualcuno dei precedenti...) sono molto molto difficili, non ti scoraggiare se non riesci a risolverli tutti!

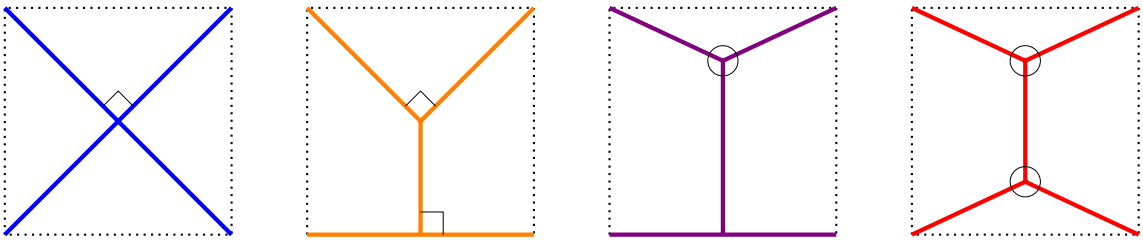
Esercizio 17. Cerca di costruire una barriera avente lunghezza minore di 3 formata da 3 parti separate.

Esercizio 18. Cerca di costruire una barriera avente lunghezza minore di 2.5 formata da 3 o più parti separate.

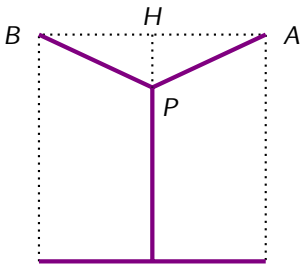
Esercizio 19. Proponi un enunciato (senza dimostrazione) che riassuma le tue riflessioni riguardo al problema del quadrato opaco.

Esercizio 20. Prova a dimostrare il precedente enunciato...

Le ultime proposte di questo laboratorio consistono nel calcolare e confrontare le lunghezze delle seguenti barriere, in modo da individuare la più corta.



Nelle figure precedenti abbiamo indicato con una piccola spezzata tre angoli retti, con un piccolo arco nove angoli da $2\pi/3$. La prima barriera (quella blu) è l'unione delle due diagonali o, se si preferisce, di quattro semidiagonali: grazie a questa osservazione possiamo affermare subito che la sua lunghezza è $2\sqrt{2}$. La barriera in arancione è una piccola variazione della precedente, infatti è costituita da un lato, due semidiagonali e un tratto lungo quanto mezzo lato. La somma di questi contributi vale $(\sqrt{2}+3/2)$, che è più della precedente, visto che due semidiagonali sono meno lunghe di un lato e mezzo...
La barriera viola merita un discorso leggermente più approfondito.



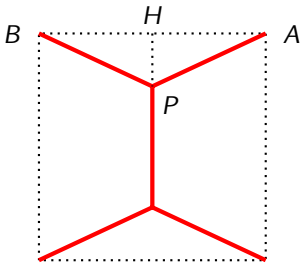
Poichè $\widehat{BPH} = \widehat{HPA} = \pi/3$, $\overline{HP} \perp \overline{AB}$, $\overline{HB} = \overline{AH} = 1/2$ e grazie al teorema di Pitagora abbiamo che

$$\overline{AP} = 2\overline{HP} \qquad \text{e} \qquad \overline{AP}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{HP}^2$$

da cui otteniamo che $\overline{AP} = 1/\sqrt{3}$. Adesso possiamo calcolare la lunghezza L della barriera, dai precedenti calcoli abbiamo che

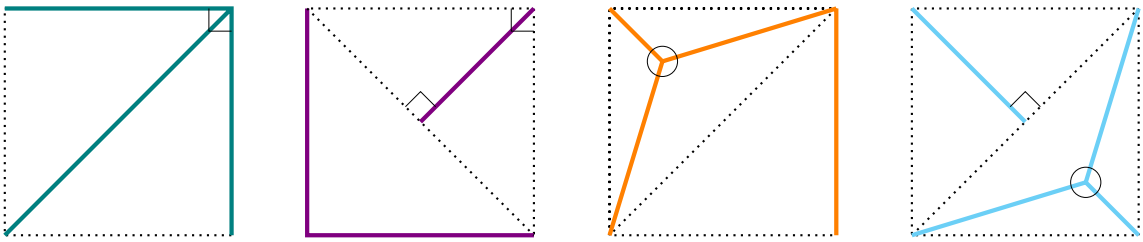
$$L = 1 + \left(1 - \overline{HP}\right) + 2\overline{AP} = 1 + 1 - \frac{\sqrt{3}}{6} + 2\frac{\sqrt{3}}{3} = 2 + \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 2,866$$

I calcoli appena terminati ci aiutano moltissimo nel calcolo della lunghezza della barriera rossa che è (di fatto) costruita per simmetria dalla parte superiore della barriera viola.
Quindi abbiamo che

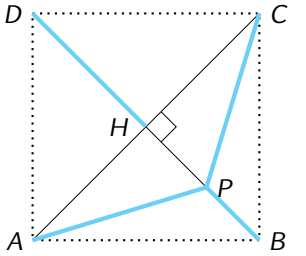


$$L = 4\overline{AP} + 1 - 2\overline{HP} = 4\frac{\sqrt{3}}{3} + 1 - 2\frac{\sqrt{3}}{6} = 1 + \sqrt{3} \approx 2,732$$

Al momento la barriera rossa è la barriera più corta che abbiamo e che rende opaco il quadrato. La figura ottenuta costituisce il grafo di lunghezza minima che connette i quattro vertici del quadrato, in letteratura tale grafo è noto come albero di Steiner. Un piccolo approfondimento relativo all'albero di Steiner di un triangolo è riportato al termine di queste note.
Affrontiamo ora l'ultimo gruppo di barriere proposte. La novità di questo insieme di barriere sta nel fatto che abbiamo preso in considerazione strutture geometriche fatte di due pezzi disgiunti (componenti) nella speranza di ottenere soluzione del problema del quadrato opaco più corte di quelle già incontrate.



La prima barriera è abbastanza facile da misurare e la sua lunghezza è pari a due lati ed una diagonale del quadrato, cioè $(2+\sqrt{2}) \approx 3,4142$, mentre la barriera viola ci mostra che è possibile rimuovere un pezzo della diagonale senza pagar dazio, ottenendo una barriera più corta di lunghezza pari a $2+\sqrt{2}/2 \approx 2,7071$.
Le ultime due barriere sono un po' più laboriose.
Possiamo subito osservare che tali barriere sono formate da un albero di Steiner di un triangolo più un segmento e, chiaramente, la barriera celeste è più corta di quella arancione visto che un lato di lunghezza 1 è rimpiazzato da mezza diagonale (che è lunga $\sqrt{2}/2 \approx 0,7071$).



Ricordiamo che $\overline{HC} = \overline{HA} = \sqrt{2}/2$, $\widehat{HPC} = \pi/3$ e $\widehat{HCP} = \pi/6$. Siccome $\overline{PC} = 2\overline{HP}$, per il teorema di Pitagora abbiamo che

$$\overline{HP}^2 = \frac{1}{6} \qquad \text{cioè} \qquad \overline{HP} = \frac{1}{\sqrt{6}} \qquad \text{e} \qquad \overline{PC} = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

Da questo otteniamo subito che

$$\overline{PB} = \overline{HB} - \overline{HP} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{6}}$$

e siccome vale anche che

$$\overline{DH} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \overline{AP} = \overline{PC} = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

possiamo calcolare la lunghezza della barriera celeste

$$L = \overline{DH} + \overline{PB} + \overline{AP} + \overline{PC} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{2}{\sqrt{6}} + \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{6}} = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \approx 2{,}639$$

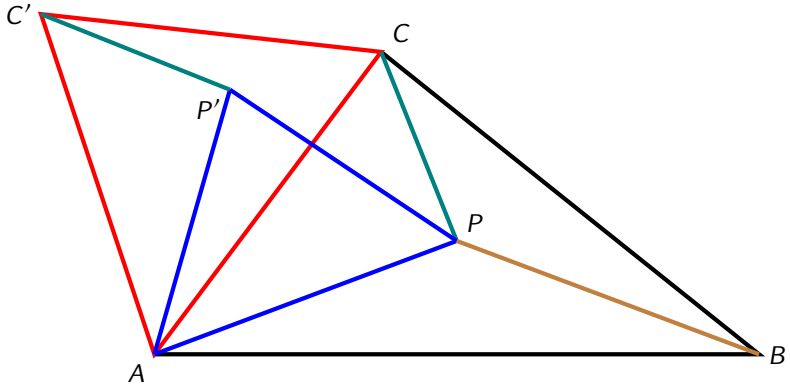
Commenti finali

La barriera celeste, discussa or ora, è una barriera particolarmente interessante: infatti, in [3], è dimostrato che è la barriera ottimale (cioè la più corta) tra tutte le barriere aventi due componenti, mentre la barriera rossa dell'attività 3 è la migliore tra tutte le barriere ad una sola componente. Al momento non è possibile sapere di più, nel senso che non esistono risultati dimostrati che aggiungano altre informazioni a quanto detto finora. Notiamo però che si pensa sia vera la seguente congettura:
La barriera celeste è la barriera più corta tra **tutte** le barriere possibili, indipendentemente dal numero di componenti.

L'albero di Steiner

Teorema 1. *Dato un triangolo $T = \widehat{ABC} \subseteq \mathbb{R}^2$, si trovi il punto $P \in T$ che rende più piccola possibile la quantità $d_E(P,A) + d_E(P,B) + d_E(P,C)$.*

Dimostrazione. Tutto il ragionamento che sviluppiamo fa riferimento alla figura più avanti, che mostra un'astuta costruzione che ci permetterà di affontare e risolvere il problema che ci siamo posti. Sia T il triangolo di vertici A, B e C e scegliamo un punto P interno a T: il nostro scopo è trovare P in modo che la somma delle sue distanze dai vertici del triangolo sia più piccola possibile.



Costruiamo sul lato $\overline{AC}$ un triangolo equilatero, quindi abbiamo che $\overline{AC} = \overline{AC'} = \overline{CC'}$ e che $\widehat{ACC'} = \widehat{CC'A} = \widehat{C'AC} = \pi/3$, e costruiamo il punto P' in modo che $\widehat{AP'C'}$ sia la rotazione di $\pi/3$ del triangolo $\widehat{APC}$, in questo modo abbiamo che $\widehat{APP'} = \pi/3$ e anche che $\overline{AP} = \overline{AP'}$.
Quindi il triangolo $\widehat{APP'}$ è equilatero, perché è isoscele rispetto alla base $\overline{PP'}$, ed ha l'angolo opposto di $\pi/3$, da cui possiamo dedurre che $\overline{AP} = \overline{PP'}$. Siccome, per costruzione, $\overline{CP} = \overline{C'P'}$ abbaimo provato che

$$\overline{AP} + \overline{BP} + \overline{CP} = \overline{AP'} + \overline{BP} + \overline{C'P'} = \overline{BP} + \overline{PP'} + \overline{P'C'}$$

Quindi la somma delle distanze di P dai vertici del triangolo T è la lunghezza della spezzata $\overline{BPP'C'}$, e questa spezzata è di lungehzza minima quando è un segmento rettilineo, cioè quando i punti B, P, P' e C' sono allineati o, equivalentemente, $\widehat{APP'} = \widehat{APP'} = \pi$. A questo punto abbiamo ottenuto che

$$\widehat{APB} = \pi - \widehat{APP'} = \pi - \pi/3 = 2\pi/3$$

In conclusione il punto P desiderato (chiamato anche punto di Steiner) può essere caratterizzato come l'unico punto del triangolo tale che

$$\widehat{APB} = \widehat{BPC} = \widehat{CPA} = 2\pi/3$$

La costruzione è possibile **solo** se tutti gli angoli del triangolo sono ampi, al più $2\pi/3$, se uno degli angoli eccede questa quantità il vertice in questione realizza il minimo della somma delle distanze... ■

Riferimenti bibliografici

[1] H.S.M. Coxeter, Introduction to Geometry, John Wiley & Sons Inc 1969.

[2] E. Delucchi, G. Gaiffi & L. Pernazza, Giochi e Percorsi Matematici, Springer-Verlag Italia 2012.

[3] B. Kahwol, Some nonconvex shape optimization problems, in Optimal Shape Design (lectures CIME, June 1-6, 1998), A. Cellina & A. Ornelas eds, Springer-Verlag 2000.