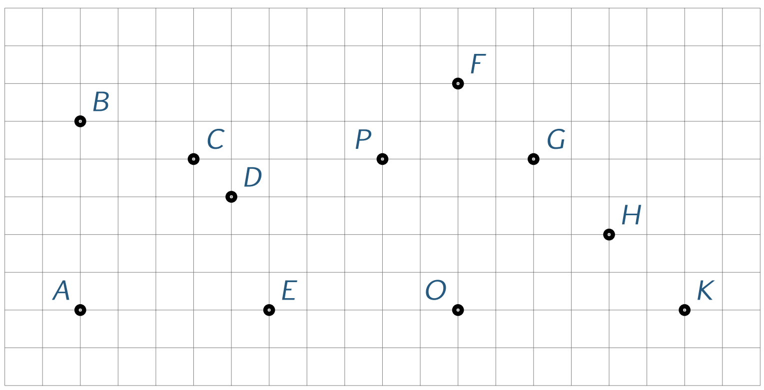
GEOMETRIA E TASSISTI

EUGENIO MONTEFUSCO, MARCELLO PONSIGLIONE & EMANUELE SPADARO
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA - SAPIENZA UNIVERSITÀ DI ROMA
PIAZZALE ALDO MORO 5, 00185 ROMA

Cominciamo ricordando la definizione di distanza euclidea e di distanza del tassista

$$d_E(A,B) = \sqrt{[x_A - x_B]^2 + [y_A - y_B]^2} \qquad d_T(A,B) = |x_A - x_B| + |y_A - y_B|$$

e inserendo una figura a cui fare riferimento per molti degli esercizi proposti



Esercizio 1. *Calcolare le seguenti distanze:* $d_E(A,F)$ *e* $d_T(A,P)$.

Esercizio 2. *Calcolare* $d_E(A,B)$, $d_E(A,C)$, $d_E(A,D)$, $d_E(A,E)$, $d_T(A,B)$, $d_T(A,C)$, $d_T(A,D)$ *e* $d_T(A,E)$.

Esercizio 3. *Calcolare* $d_E(O,F)$, $d_E(O,G)$, $d_E(O,H)$, $d_E(O,K)$, $d_T(O,F)$, $d_T(O,G)$, $d_T(O,H)$ *e* $d_T(O,K)$.

Esercizio 4. *Si calcolino* $d_T(A,E)$, $d_T(A,O)$, $d_T(A,K)$, *poi* $d_E(A,E)$, $d_E(A,O)$, $d_E(A,K)$ *e si spieghi il risultato ottenuto: in quali casi le due distanze coincidono?*

Esercizio 5. *Verificare che il triangolo* $\widehat{ABC}$ *è isoscele rispetto alla distanza euclidea, ma non rispetto alla distanza del tassista.*

Esercizio 6. *Verificare che il triangolo* $\widehat{OFH}$ *è isoscele rispetto alla distanza del tassista, ma non è isoscele rispetto alla distanza euclidea.*

Esercizio 7. *È possibile individuare tra i punti segnati nella figura i vertici di un triangolo equilatero rispetto alla distanza del tassista?*

Date: $\varepsilon(\mu)$-20 febbraio 2024.

ESERCIZIO 8. *Si provi che la distanza del tassista è una distanza, cioè che*
(D1) $d_T(A,B) \geq 0$ *per ogni* A e B e $d_T(A,B) = 0$ *se e solo se* $A \equiv B$,
(D2) $d_T(A,B) = d_T(B,A)$ *per ogni* A e B,
(D3) $d_T(A,B) \leq d_T(A,C) + d_T(B,C)$ *per ogni terna di punti del piano* A, B e C.

ESERCIZIO 9. *Dati i punti* $O(0,0)$ e $A(6,8)$ *si individui il percorso più breve (per un tassista) che li connette. Si provi a scrivere una dimostrazione della seguente affermazione*
Dati i punti $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ si dimostri che esiste sempre un percorso di lunghezza minima che li unisce.
Tale percorso è unico? In quali casi?

ESERCIZIO 10. *Nel piano si immagini che una centrale dell'acqua sia posizionata nel punto* $A \equiv (2,3)$, *una centrale del gas in* $G \equiv (10,1)$ *e una centrale elettrica nel punto* $E \equiv (6,6)$.
Si decida dove posizionare una casa K *in modo che le centrali siano più vicine possibile, cioè in modo che sia minima la quantità* $d_T(K,A) + d_T(K,G) + d_T(K,E)$.

ESERCIZIO 11. *Proporre (e spiegare) un esperimento teorico che permetta al nostro tassista di rendersi conto che il suo universo non è euclideo.*

ESERCIZIO 12. *Ridiscutere i criteri di congruenza dei triangoli (noti in ambito euclideo) nella geometria del tassista.*

ESERCIZIO 13. *Nella geometria del tassista è vero che due triangoli simili hanno i lati corrispondenti proporzionali?*

ESERCIZIO 14. *Alla luce delle osservazioni fatte ridiscutere il concetto di congruenza tra segmenti nella geometria del tassista.*

ESERCIZIO 15. *Prova a caratterizzare le trasformazioni del piano che preservano le distanze tra coppie di punti (***isometrie***) rispetto alla geometria del tassista.*

ESERCIZIO 16. *Fissato un punto* O *del piano e un numero* $r > 0$, *si disegnino i seguenti luoghi geometrici:* $\mathcal{C}_E = \{P : d_E(P,O) = r\}$ e $\mathcal{C}_T = \{P : d_T(P,O) = r\}$.

ESERCIZIO 17. *In geometria si definisce* **parabola** *il luogo dei punti del piano che sono equidistanti da un punto fisso (detto* **fuoco***) e una retta fissa (che si chiama* **direttrice***). Si ottenga l'equazione dei punti che appartengono alla parabola (sia nella geometria euclidea che nella geometria del tassista) considerando come fuoco il punto* $F \equiv (0,D)$ *e come direttrice la retta* $r \equiv \{y = -D\}$, *dove* $D > 0$ *è un numero reale.*

ESERCIZIO 18. *In geometria l'***ellisse** *è il luogo dei punti del piano la cui somma delle distanze da due punti fissi, detti fuochi, è costante, si provi a scrivere l'equazione dell'ellisse avente i fuochi nei punti* $A \equiv (-1,0)$ e $B \equiv (1,0)$ *e imponendo la somma delle distanze (sia* d_E *che* d_T*) pari a* 4.

Esercizio 19. *Nella geometria del tassista si costruisca*
i. un triangolo isoscele con angoli alla base differenti,
ii. un triangolo equilatero retto,
iii. un triangolo con due angoli uguali ma lati di lunghezze diverse.

Esercizio 20. *Si disegni il luogo dei punti* P *del piano tali che* $d_T(P, A) = d_T(P, B)$*, nel caso* $A \equiv (0, 0)$ *e* $B \equiv (4, 2)$ *e poi nel caso* $A \equiv (0, 0)$ *e* $B \equiv (3, 3)$*.*

Esercizio 21. *Si disegni l'ellisse* $\{d_T(P, A) + d_T(P, B) = 10\}$ *dove* $A \equiv (2, 2)$ *e* $B \equiv (-2, -2)$*.*

Esercizio 22. *Dati i punti* $A(2, 0)$ *e* $B(-2, 0)$ *si caratterizzi il luogo dei punti tali che* $\{d_T(P, A) - d_T(P, B) = 1\}$*.*

Esercizio 23. *Si disegni la parabola di fuoco* $O(1, 1)$ *e direttrice* $\{y = -x\}$*.*

La geometria euclidea è una conquista della civiltà greca, custodita, tramandata e coltivata dalla cultura europea e poi mondiale da più di 2000 anni. Ancora oggi centinaia di migliaia di studenti vengono ogni anno irretiti, torturati e vessati con lo studio della geometria euclidea...
Euclide visse a cavallo del IV e III secolo a.C., di lui non si hanno molte informazioni, per esempio Proclo lo colloca tra i più giovani seguaci di Platone raccontando: -Non molto più giovane di loro Euclide; egli raccolse gli **Elementi**, ne ordinò in sistema molti di Eudosso, ne perfezionò molti di Teeteto e ridusse a dimostrazioni inconfutabili quelli che suoi predecessori avevano poco rigorosamente dimostrato. Visse al tempo del primo Tolomeo, perché Archimede, che visse subito dopo Tolomeo primo, cita Euclide; e anche si racconta che Tolomeo gli chiese una volta se non ci fosse una via più breve degli Elementi per apprendere la geometria; ed egli rispose che per la geometria non esistevano vie fatte per i re. Euclide era dunque più giovane dei discepoli di Platone ... egli si propose come scopo finale di tutta la raccolta degli Elementi la costruzione delle figure chiamate platoniche.- (Proclo, Commento a Euclide, II, 68)
Sul finire del IV secolo a.C., Tolomeo I, faraone illuminato, puntiglioso e propositivo nei suoi sforzi governativi, istituì ad Alessandria una scuola, chiamata Museo. In questa scuola insegnava un gruppo di studiosi, tra cui Euclide.
Euclide fu uno degli iniziatori dell'impostazione assiomatico delle teorie matematiche, impegno che venne intrapreso a partire dal suo secolo e che prevede assiomi e teoremi, che sono conseguenza dei primi. Questo modello è applicato a tutte le discipline scientifiche deduttive, come la logica e la matematica, e ha permesso ad esse di appropriarsi di quella metodicità che oggi attribuiamo loro, grazie all'articolazione di principi primi e di risultati da essi derivati. Nonostante i pochissimi precedenti storici della teoria assiomatica in campo matematico e non, va detto che l'assioma in sé è comunque alla base della matematica. Premesso che l'iniziazione a questo tipo di approccio sia un enorme merito da riconoscere al matematico di Alessandria, egli ha proposto un tipo di geometria fondata fortemente sulla teoria assiomatica, mentre, in modo antitetico, molti suoi colleghi contemporanei hanno rifiutato nettamente un tipo di geometria che partisse dagli assiomi.
Per ciò che concerne gli insegnamenti condotti da Euclide nel Museo, egli venne ricordato dai suoi allievi soprattutto per le ampie conoscenze in vari campi e per abilità espositive che hanno fatto di lui uno dei docenti più apprezzati e preparati nella scuola alessandrina. Queste esclusive qualità gli sono state d'aiuto anche nella scrittura della sua grande opera, gli Elementi.
Gli assiomi della geometria euclidea sono i seguenti

- i Tra due punti qualsiasi è possibile tracciare una e una sola retta,
- ii Si può prolungare un segmento oltre i due punti indefinitamente,
- iii Dato un punto e una lunghezza, è possibile descrivere un cerchio,
- iv Tutti gli angoli retti sono congruenti tra loro,
- v Se una retta che taglia altre due rette determina dallo stesso lato angoli interni la cui somma è minore di due angoli retti, prolungando le due rette, esse si incontreranno dalla parte dove i due angoli hanno somma minore di due retti.

In realtà il quinto postulato è equivalente all'assioma seguente, oggi più usato e sicuramente più semplice (almeno da scrivere!)

- v$_{bis}$ Per un punto P esterno ad una retta data r passa una e una sola retta parallela ad r.

Dagli assiomi si possono dedurre delle relazioni di incidenza tra punti, rette e piani, per esempio:

- Per un punto passano infinite rette,
- Per due punti distinti passa una e una sola retta,
- Per una retta nello spazio passano infiniti piani,
- Per tre punti non allineati nello spazio passa un solo piano,
- Per tre punti allineati passa una e una sola retta,

O alcune proprietà della distanza euclidea d_E

1. $d_E(A,B) \geq 0$ e $d_E(A,B) = 0$ se e solo se $A \equiv B$,

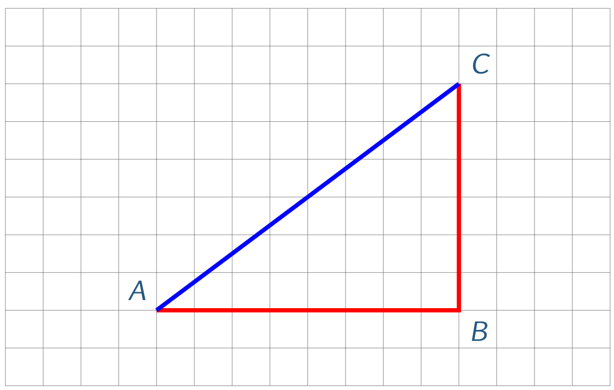
2. $d_E(A,B) = d_E(B,A)$,
3. $d_E(A,B) \le d_E(A,C) + d_E(B,C)$ per ogni terna di punti,

I riferimenti bibliografici per queste brevi note sono i testi [1, 2].

---

2. Geometria del tassista

In matematica, la geometria del tassista, del taxi o geometria di Manhattan (in inglese **Taxicab Geometry** o anche Manhattan Geometry) è una particolare geometria introdotta dal matematico lituano (naturalizzato tedesco) **Hermann Minkowski** (Aleksotas 22.06.1864, Gottinga 12.01.1909) probabilmente più famoso per i suoi contributi alla teoria della relatività ristretta. La geometria del tassista consiste essenzialmente in un modo differente di calcolare la distanza tra due punti del piano.
Una curiosità: il nome di questa geometria è riferito al sistema stradale tipico di luoghi come Manhattan, in cui gran parte delle vie di scorrimento sono ortogonali tra di loro; in Italia esempi sono le città di Aosta, Torino e Bari (almeno nella zona più antica) e, più in generale, tutti gli abitati che hanno mantenuto una pianta di ispirazione romana.



La denominazione è, chiaramente, legata al fatto che un ipotetico tassista che si muove per una città di questo tipo è obbligato a muoversi solo lungo due direzioni, chiamate convenzionalmente orizzontale e verticale, come suggerito dal disegno. Riferendoci alla figura precedente definiamo

$$d_E(A,C) = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2} = \sqrt{64+36} = 10 \qquad d_T(A,C) = |\overline{AB}| + |\overline{BC}| = 8 + 6 = 14$$

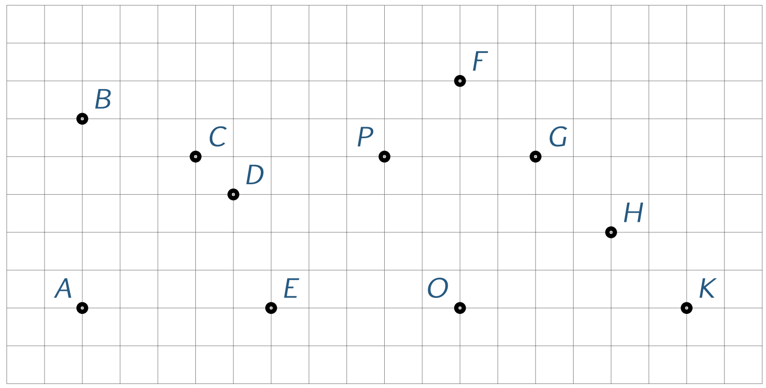
dove d_E indica la distanza euclidea tra due punti, ed è definita grazie al teorema di Pitagora, mentre d_T è la **distanza del tassista**. Si noti che i segmenti orizzontali e verticali hanno la stessa distanza, infatti

$$d_E(A,B) = d_T(A,B) = \overline{AB} = 8 \qquad d_E(B,C) = d_T(B,C) = \overline{BC} = 6$$

Nel precedente disegno abbiamo evidenziato in blu il segmento che rappresenta la distanza euclidea, in rosso il percorso (e quindi la distanza) del tassista.
La definzione esatta delle due distanze è la seguente: dati due punti $A \equiv (x_A, y_A)$ e $B \equiv (x_B, y_B)$ nel piano poniamo

$$d_E(A,B) = \sqrt{[x_A - x_B]^2 + [y_A - y_B]^2} \qquad d_T(A,B) = |x_A - x_B| + |y_A - y_B|$$

dove le coordinate dei punti sono spresse rispetto ad un sistema di riferimento ortogonale xOy del piano. La geometria del tassista è una **geometria non euclidea**, e questo è dovuto al fatto che la distanza euclidea d_E è diversa dalla distanza del tassista d_T! Naturalmente approfondiremo questo discorso nelle prossime pagine.



ESERCIZIO 1. *Facendo riferimento alla figura precedente si calcolino le seguenti distanze:* $d_E(A,F)$ *e* $d_T(A,P)$*.*

Svolgimento: Per svolgere gli esercizi proposti useremo la griglia del disegno come un sistema di riferimento in cui ogni quadrato ha lato unitario. Ricorrendo alle definizioni delle due distanze otteniamo

$$d_E(A,F) = \sqrt{|x_F - x_A|^2 + |y_F - y_A|^2} = \sqrt{10^2 + 6^2} = \sqrt{136} = 2\sqrt{34}$$
$$d_T(A,P) = |x_P - x_A| + |y_P - y_A| = 8 + 4 = 12$$

si noti che, sorpendentemente, $d_E(A,F) < d_T(A,P)$: la figura sembra suggerire il contrario, ma il paradosso si scioglie facilmente osservando che stiamo confrontando distanze differenti, le quali hanno definizioni diverse e misurano le quantità spaziali in modo diverso, quindi non possiamo aspettarci un risultato in accordo con l'esperienza visiva.

ESERCIZIO 2. *Facendo riferimento alla figura precedente si calcolino le seguenti distanze:* $d_E(A,B)$, $d_E(A,C)$, $d_E(A,D)$, $d_E(A,E)$, $d_T(A,B)$, $d_T(A,C)$, $d_T(A,D)$ *e* $d_T(A,E)$*.*

Svolgimento: Procediamo come nell'esercizio precedente cominciando con le distanze euclidee

$$d_E(A,B) = \sqrt{0^2 + 5^2} = 5 \qquad d_E(A,C) = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$
$$d_E(A,D) = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \qquad d_E(A,E) = \sqrt{5^2 + 0^2} = 5$$

per proseguire con le distanze del tassista

$$d_T(A,B) = |0| + |5| = 5 \qquad d_T(A,C) = |3| + |4| = 7$$
$$d_T(A,D) = |4| + |3| = 7 \qquad d_T(A,E) = |5| + |0| = 5$$

ESERCIZIO 3. *Facendo riferimento alla figura precedente si calcolino le seguenti distanze:* $d_E(O,F)$, $d_E(O,G)$, $d_E(O,H)$, $d_E(O,K)$, $d_T(O,F)$, $d_T(O,G)$, $d_T(O,H)$ *e* $d_T(O,K)$*.*

Svolgimento: Partiamo di nuovo con le distanze euclidee

$$d_E(O,F) = \sqrt{0^2 + 6^2} = 6 \qquad d_E(O,G) = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$$
$$d_E(O,H) = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5} \qquad d_E(O,K) = \sqrt{6^2 + 0^2} = 6$$

per terminare con le distanze del tassista

$$d_T(O,F) = |0| + |6| = 6 \qquad d_T(O,G) = |2| + |4| = 6$$
$$d_T(O,H) = |4| + |2| = 6 \qquad d_T(O,K) = |6| + |0| = 6$$

ESERCIZIO 4. *Facendo riferimento alla figura precedente si calcolino le seguenti distanze:* $d_T(A,E)$, $d_T(A,O)$, $d_T(A,K)$ *e poi* $d_E(A,E)$, $d_E(A,O)$, $d_E(A,K)$*. Si spieghi il risultato ottenuto e si dica in quali casi le due distanze coincidono.*

Svolgimento: Ormai sappiamo come procedere, quindi scriviamo subito

$$d_T(A,E) = |5| = 5 \qquad d_T(A,O) = |10| = 10 \qquad d_T(A,K) = |16| = 16$$

e ancora

$$d_E(A,E) = \sqrt{5^2} = 5 \qquad d_E(A,O) = \sqrt{10^2} = 10 \qquad d_E(A,K) = \sqrt{16^2} = 16$$

Il motivo delle uguaglianze precedenti risiede nel fatto che

$$\sqrt{a^2} = |a| \qquad \text{per ogni } a \in \mathbb{R}$$

La disuguaglianza triangolare della geometria euclidea implica che vale sempre la relazione

$$d_E(P,Q) \leq d_T(P,Q) \qquad \text{per ogni } P,Q \in \mathbb{R}^2$$

perché asserisce che in un triangolo rettangolo l'ipotenusa è sempre più corta della somma dei cateti. Da questo deduciamo che l'uguaglianza è vera solo quando i due punti si trovano su una retta orizzontale o verticale (e quindi il triangolo rettangolo è degenere, avendo un cateto di lunghezza nulla).

ESERCIZIO 5. *Facendo riferimento alla figura precedente si verifichi che il triangolo $\widehat{ABC}$ è isoscele rispetto alla distanza euclidea, ma non è isoscele rispetto alla distanza del tassista.*

Svolgimento: Procediamo con ordine e calcoliamo tutte le lunghezze (euclidee) dei lati del triangolo

$$d_E(A,B) = \sqrt{0^2+5^2} = 5 \qquad d_E(A,C) = \sqrt{3^2+4^2} = 5 \qquad d_E(B,C) = \sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{10}$$

e, in un secondo momento, le distanze del tassista

$$d_T(A,B) = |5| = 5 \qquad d_T(A,C) = |3|+|4| = 7 \qquad d_T(B,C) = |3|+|1| = 4$$

Dai risultati ottenuti possiamo concludere che, effettivamente, il triangolo $\widehat{ABC}$ è isoscele rispetto alla geometria euclidea, ma non nella geometria di Manhattan! Il motivo "profondo" di questa discrepanza è che la geometria del tassista non preserva le distanze, per essere più precisi non conserva il valore delle distanze sotto l'azione delle rotazioni, al contrario della geometria di Euclide.

ESERCIZIO 6. *Facendo riferimento alla figura precedente si verifichi che il triangolo $\widehat{OFH}$ è isoscele rispetto alla distanza del tassista, ma non è isoscele rispetto alla distanza euclidea.*

Svolgimento: Questo esercizio è una variazione sul tema proposto dal precedente, procediamo nello stesso modo e calcoliamo le distanze euclidee

$$d_E(O,F) = \sqrt{6^2} = 6 \qquad d_E(O,H) = \sqrt{4^2+2^2} = 2\sqrt{5} \qquad d_E(F,H) = \sqrt{4^2+4^2} = 4\sqrt{2}$$

e, in un secondo momento, le distanze del tassista

$$d_T(O,F) = |0|+|6| = 6 \qquad d_T(O,H) = |4|+|2| = 6 \qquad d_T(F,H) = |3|+|1| = 4$$

Le distanze calcolate mostrano che, come dichiarato, $\widehat{OFH}$ è isoscele rispetto alla distanza del tassista, ma non rispetto alla distanza euclidea.

ESERCIZIO 7. *Facendo riferimento alla figura precedente, è possibile individuare tra i punti segnati i vertici di un triangolo equilatero rispetto alla distanza del tassista?*

Svolgimento: Per brevità evitiamo di calcolare le distanze tra tutte le coppie di punti evidenziati e mostriamo subito i tre vertici desiderati

$$d_T(P,F) = |2|+|2| = 4 \qquad d_T(F,G) = |2|+|2| = 4 \qquad d_T(G,P) = |4|+|0| = 4$$

Si noti che il triangolo individuato è isoscele rispetto alla distanza euclidea, in realtà questo fatto è solo un caso: per esempio il triangolo di vertici $A \equiv (0,3)$, $B \equiv (4,5)$ e $C \equiv (3,0)$ è equilatero per la geometria del tassista, ma ha tutti lati di differente lunghezza euclidea.

ESERCIZIO 8. *Si provi che la distanza del tassista è una distanza, cioè che*

(D1) $d_T(A,B) \geq 0$ *per ogni* A *e* B *e* $d_T(A,B) = 0$ *se e solo se* $A \equiv B$,
(D2) $d_T(A,B) = d_T(B,A)$ *per ogni* A *e* B,
(D3) $d_T(A,B) \leq d_T(A,C) + d_T(B,C)$ *per ogni terna di punti del piano* A, B *e* C.

Svolgimento: Ricordiamo che, scelto un sistema di riferimento ortogonale nel piano, la distanza del tassista è definita nel seguente modo

$$d_T(A,B) = |x_A - x_B| + |y_A - y_B|$$

Dalla definizione segue subito la proprietà (D1), perché la distanza è una somma di valori assoluti, per cui non può produrre risultati negativi e vale che

$$0 \leq |x_A - x_B|, |y_A - y_B| \leq |x_A - x_B| + |y_A - y_B| = d_T(A,B)$$

quindi tale distanza può essere nulla se e solo se sono coincidenti sia le ascisse che le ordinate dei due punti A e B coinvolti.
La simmetria della distanza (la proprietà (D2)) è una conseguenza diretta della simmetria del valore assoluto, cioè del fatto che $|a-b| = |b-a|$ per ogni $a, b \in \mathbb{R}$.
Quindi l'unica proprietà impegnativa da dimostrare è la terza. Osserviamo subito che

$$|a-b| = |a-c+c-b| \leq |a-c| + |c-b| \qquad \text{per ogni } a,b,c \in \mathbb{R}$$

infatti se c si trova tra a e b vale l'uguaglianza perché abbiamo spezzato un segmento in due sottosegmenti che lo compongono, invece se c è esterno al segmenti di estremi a e b la disuguaglianza è stretta perché $|a-b|$ è la lunghezza di un segmento interno al segmento di estremi a e c (o di estremi b e c, a seconda dei casi). La precedente disuguaglianza ci permette di concludere agevolmente, infatti possiamo scrivere

$$\begin{aligned} d_T(A,B) &= |x_A - x_B| + |y_A - y_B| = |x_A - x_C + x_C - x_B| + |y_A - y_C + y_C - y_B| \\ &\leq |x_A - x_C| + |x_C - x_B| + |y_A - y_C| + |y_A - y_C| = d_T(A,C) + d_T(A,B) \end{aligned}$$

provando la proprietà (D3).

ESERCIZIO 9. *Preso un punto* O *del piano e un numero reale* $r > 0$*, si disegni i seguenti luoghi geometrici:* $\mathcal{C}_E = \{P : d_E(P,O) = r\}$ *e* $\mathcal{C}_T = \{P : d_T(P,O) = r\}$.

Svolgimento: Supponiamo di avere un sistema di riferimento cartesiano (quindi asse delle ascisse e asse delle ordinate ortogonali), e imponiamo sulle coordinate del generico punto $P \equiv (x,y)$ delle equazioni che traducono in linguaggio algebrico la definizione geometrica.
Cominciamo con il caso euclideo, in questo caso il luogo geometrico $\mathcal{C}_E$ è una circonferenza, visto che individua i punti a distanza r dal punto $O \equiv (0,0)$, in equazioni abbiamo

$$\mathcal{C}_E = \left\{ d_E(P,O) = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = r \right\} = \left\{ x^2 + y^2 = r^2 \right\}$$

dove abbiamo elevato al quadrato per far sparire la radice per ottenere la figura in rosso nel disegno più avanti.
Nel caso del tassista abbiamo che

$$\mathcal{C}_T = \{ d_T(P,O) = |x-0| + |y-0| = r \} = \{ |x| + |y| = r \}$$

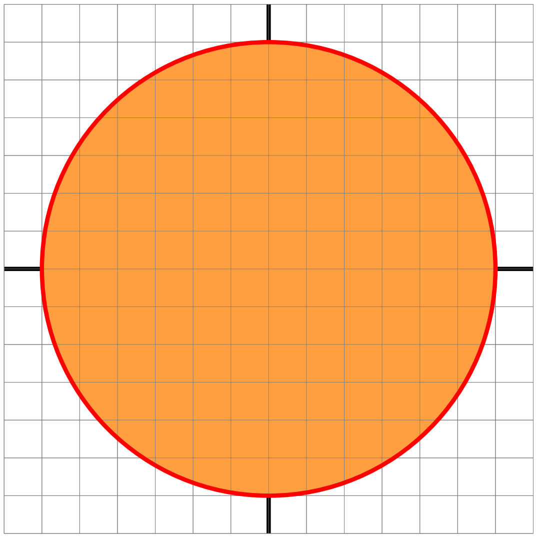
e semplificare ulteriormente l'espressione non è possibile. Per capire come è fatto il luogo geometrico prima di tutto è necessario ricordare la definizione di **valore assoluto**, per definizione vale:

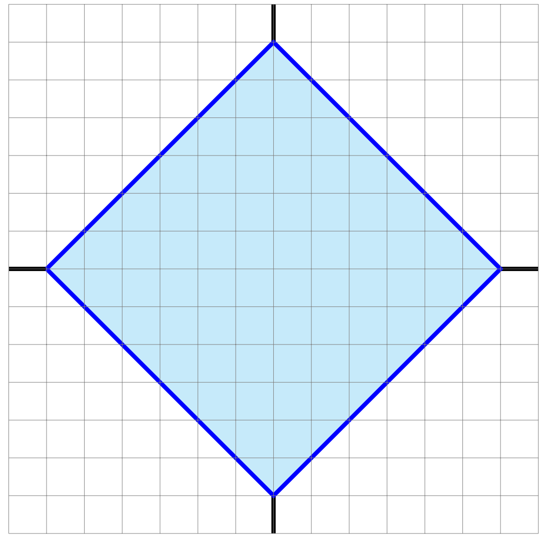
$$|a| = \begin{cases} a & \text{se } a \geq 0 \\ -a & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

A questo punto possiamo procedere considerando le differenti situazioni che si producono. Nel primo quadrante abbiamo che $x > 0$ e $y > 0$, per cui la relazione precedente diventa

$$x + y = r \qquad \text{cioè} \qquad y = r - x$$

cioè dobbiamo considerare l'intersezione tra una retta è un quadrante, il segmento della retta che appartiene al quadrante. Ripetendo opportunamente il ragionamento nei restanti tre quadranti otteniamo il quadrato celeste nella figura che segue





Ribadiamo, per chiarezza, che la curva rossa è il disegno di una circonferenza euclidea, mentre il disegno blu rappresenta una circonferenza nella geometria del tassista, la regione arancione è un cerchio euclideo, mentre la regione celeste è un cerchio per tassisti...

---

3. Qualche esercizio più impegnativo

Ogni definizione che richiede l'uso della distanza subirà dei cambiamenti nel passaggio dalla geometria di Euclide alla geometria del tassista: questo è quello che rende questa geometria non euclidea! Proviamo a studiare alcuni esempi rilevanti di oggetti che cambiano sensibilmente tra le due geometrie.

Esercizio 10. *In geometria si definisce* **parabola** *il luogo dei punti del piano che sono equidistanti da un punto fisso (detto* **fuoco***) e una retta fissa (che si chiama* **direttrice***). Si ottenga l'equazione dei punti che appartengono alla parabola (sia nella geometria euclidea che nella geometria del tassista) considerando come fuoco il punto $F \equiv (0, D)$ e come direttrice la retta $r \equiv \{y = -D\}$, dove $D > 0$ è un numero reale.*

Svolgimento: Sia $P \equiv (x, y)$ il generico punto sulla parabola euclidea, memori delle definizioni di distanza tra due punti e della distanza tra un punto e una retta abbiamo che

$$d_E(P,F) = \sqrt{x^2 + (y-D)^2} \qquad d_E(P,r) = |y+D| = (y+D)$$

si noti che abbiamo tolto un valore assoluto, perché la parabola non può trovarsi nel semipiano non contenente il fuoco: ogni punto in tale semipiano ha distanza dal fuoco più grande della distanza dalla direttrice e l'uguaglianza non è possibile. Adesso imponiamo l'uguaglianza della definzione di parabola, eleviamo al quadrato ed effettuiamo alcune semplificazioni come segue

$$y + D = \sqrt{x^2 + (y-D)^2}$$
$$y^2 + 2Dy + D^2 = x^2 + y^2 - 2Dy + D^2$$
$$4Dy = x^2$$

dai calcoli abbiamo l'equazione della parabola euclidea di fuoco F e direttrice r

$$y = \frac{1}{4D}x^2$$

A questo punto possiamo ripetere i conti per ottenere la parabola del tassista, l'unica differenza è la distanza tra i punti (la distanza tra punto e retta, in questo caso, è la stessa)

$$d_E(P,F) = |x| + |y-D| \qquad d_E(P,r) = |y+D| = (y+D)$$

uguagliando le due distanze otteniamo

$$y + D = |x| + |y-D|$$

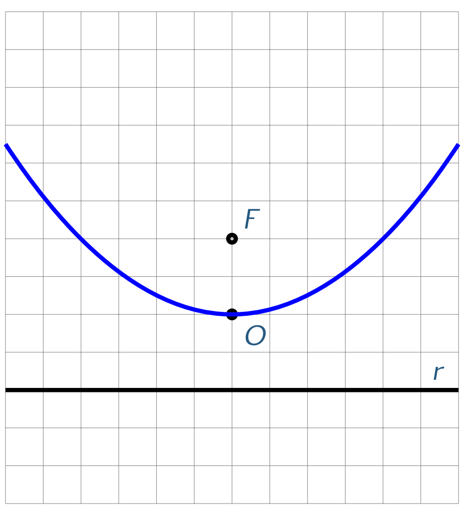
e ricordiamo anche che, per definzione, vale

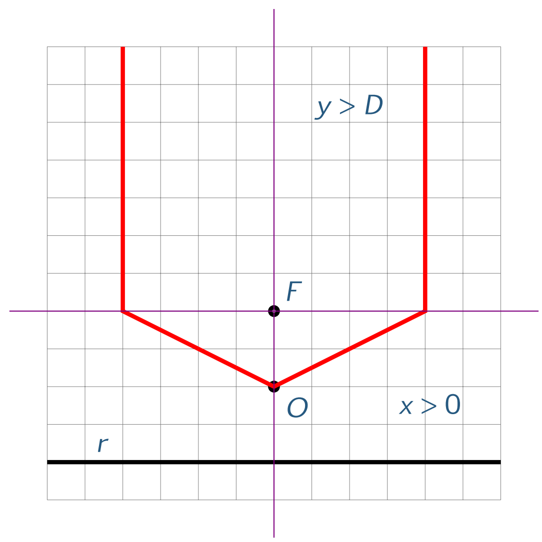
$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq D \\ -x & \text{se } x < D \end{cases} \qquad \text{e} \qquad |y-D| = \begin{cases} y-D & \text{se } y_D \geq 0 \quad y \geq D \\ D-y & \text{se } y < D \end{cases}$$

quindi abbiamo che la parabola del tassista è composta di quattro tratti di rette, secondo il seguente schema

se	$x \geq 0, y \geq D$	allora	$y+D = x+y-D$	cioè	$x = 2D$
se	$x < 0, y \geq D$	allora	$y+D = -x+y-D$	cioè	$x = -2D$
se	$x \geq 0, y < D$	allora	$y+D = x-y+D$	cioè	$x = 2y$
se	$x < 0, y < D$	allora	$y+D = -x-y+D$	cioè	$x = -2y$

Riassumiamo i risultati ottenuti con un paio di disegni





a sinistra abbiamo raffigurato la parabola euclidea, a destra la parabola del tassista.

ESERCIZIO 11. *In geometria l'**ellisse** è il luogo dei punti del piano la cui somma delle distanze da due punti fissi, detti fuochi, è costante, si provi a scrivere l'equazione dell'ellisse avente i fuochi nei punti $A \equiv (-1,0)$ e $B \equiv (1,0)$ e imponendo la somma delle distanze (sia d_E che d_T) pari a 4.*

Svolgimento: Come fatto per la parabola iniziamo studiando il caso della geometria euclidea. Dalla definizione riportata nel testo dell'esercizio dobbiamo tradurre in termini di equazione la relazione

$$d_E(A,P) + d_E(B,P) = 4$$

quindi, posto $P \equiv (x,y)$, otteniamo

$$\sqrt{(x+1)^2 + y^2} + \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = 4$$

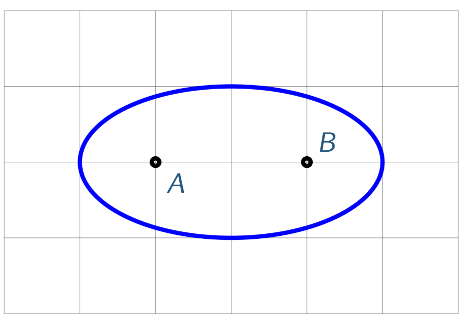
Adesso, per modo di dire, non resta che manipolare l'equazione, elevare al quadrato un paio di volte ed effettuare alcune semplificazioni, come segue

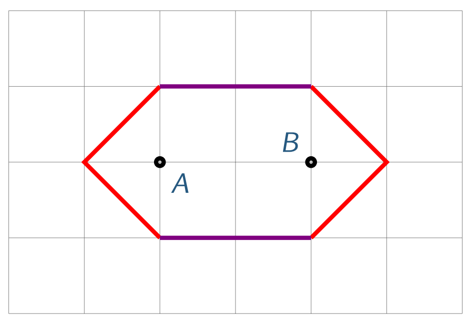
$$\sqrt{(x+1)^2+y^2} = 4-\sqrt{(x-1)^2+y^2}$$
$$(x+1)^2+y^2 = (x-1)^2+y^2+16-8\sqrt{(x-1)^2+y^2}$$
$$4-x = 2\sqrt{(x-1)^2+y^2}$$
$$16+x^2-8x = 4(x-1)^2+4y^2$$

e così giungiamo all'equazione richiesta del luogo geometrico

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3} = 1$$

per un'immagine (che, solo a volte, vale più delle parole) si guardi alla curva in blu posta alla fine dello svolgimento del testo.
Passiamo a studiare l'ellisse nella geometria del tassista. Osserviamo che $d_T(A,B) = 2$, questo ci permette di affermare subito che due metà "esterne" delle circonferenze di raggio 1 centrate nei fuochi A e B sono costituite di punti che devono appartenere all'ellisse, perché sono punti che distano 1 da uno dei due fuochi, e 3 (somma del raggio della circonferenza e della distanza tra i fuochi) dall'altro. Per completare la costruzione del luogo è sufficiente identificare i punti dell'ellisse che si trovano tra i due fuochi: tutti i punti che giacciono sul segmento $\overline{AB}$ hanno la somma delle distanze dai fuochi pari a 2, quindi è sufficiente notare che i punti sui segmenti paralleli a distanza 1 rispondono ai nostri criteri. La figura ottenuta è rappresentata nel disegno segue (immagine a destra), dove abbiamo evidenziato in rosso le due mezze circonferenza, in viola i due segmenti successivi.





Esercizio 12. *Nella geometria del tassista si costruisca*

1. *un triangolo isoscele con angoli alla base differenti,*
2. *un triangolo equilatero retto,*
3. *un triangolo con due angoli uguali ma lati di lunghezze diverse.*

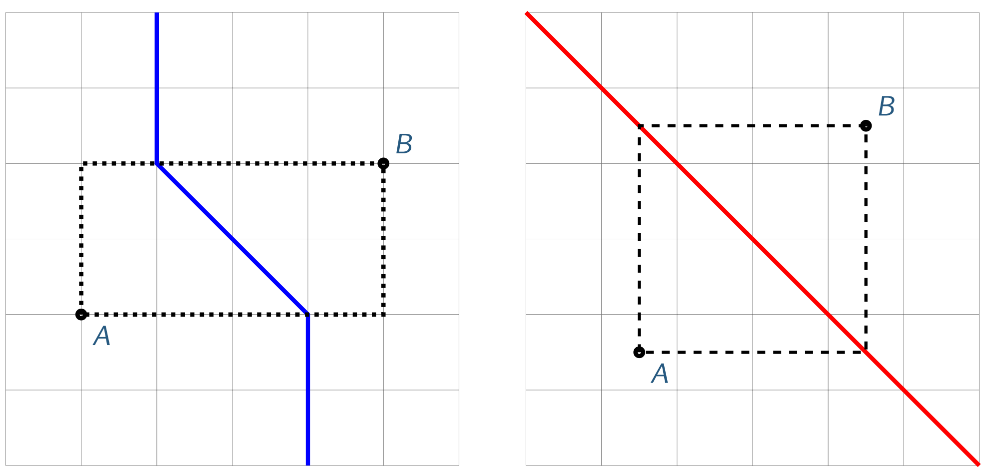
Svolgimento: Per rispondere alle richieste del testo faremo riferimento alla figura di pagina 4. Infatti, con alcune facili verifiche, si può controllare che

1. il triangolo $\widehat{OKH}$ è isoscele per la distanza del tassista, ma non ha gli angoli alla base uguale (si ricordi che nella geometria di Manhattan gli angoli si misurano esattamente come nella geometria di Euclide),
2. il triangolo $\widehat{PFG}$ è equilatero e l'angolo $\widehat{PFG} = 90^o$, cioè è un angolo retto,
3. il triangolo $\widehat{ACE}$ è isoscele (per Euclide) quindi i suoi angoli alla base sono uguali $\widehat{ACE} = \widehat{AEC}$, però il triangolo non è isoscele per un tassista, visto che $d_T(A,C) = 7$, $d_T(A,E) = 5$ ed $d_T(E,C) = 6$.

Questi esempi mostrano alcuni fatti che "contraddicono" i classici teoremi della geometria euclidea, provando che la geometria del tassista, pur nella sua semplicità, è una geometria non euclidea.

Esercizio 13. *Si disegni il luogo dei punti P del piano tali che $d_T(P,A) = d_T(P,B)$, nel caso $A \equiv (0,0)$ e $B \equiv (4,2)$ e poi nel caso $A \equiv (0,0)$ e $B \equiv (3,3)$.*

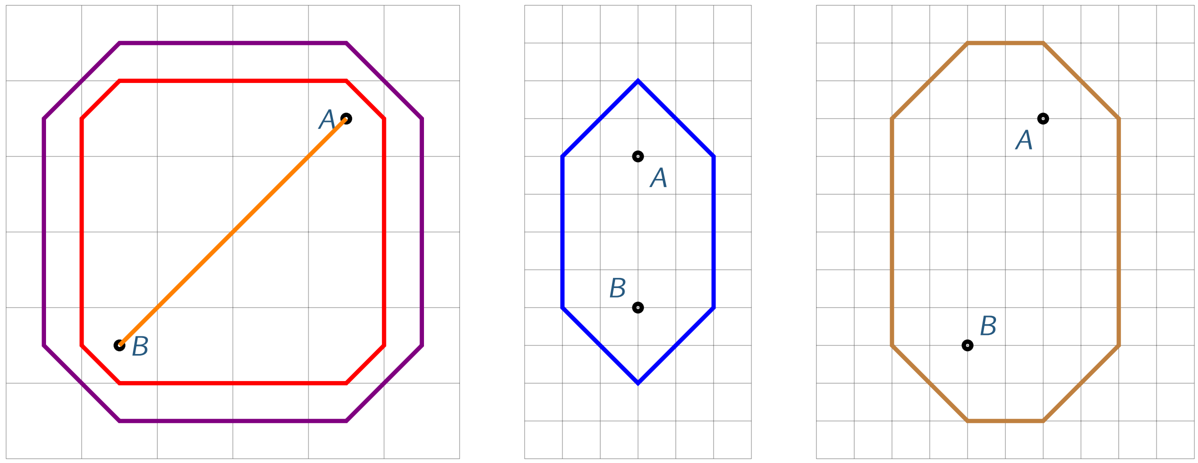
Svolgimento: È noto che il luogo dei punti P del piano tali che $d_E(P,A) = d_E(P,B)$ è l'asse del segmento $\overline{AB}$, quindi l'esercizio chiede di individuare, almeno nei due casi proposti, l'equivalente dell'asse di un segmento nella geometria di Manhattan.
Sicuramente il punto medio del segmento $\overline{AB}$ deve appartenere al luogo che vogliamo identificare, si noti che, tra l'altro, il punto medio di un segmento è lo stesso nelle due geometrie.
Consideriamo il rettangolo, con lati paralleli agli assi del riferimento cartesiano, avente il segmento $\overline{AB}$ come diagonale, il rettangolo ci permette di individuare facilmente sul suo perimetro due punti equidistanti dai punti A e B, unendo i punti otteniamo un segmento composto interamente di punti la cui distanza da A è uguale alla distanza da B. L'asse del segmento nella geometria del tassista si completa aggiungendo al segmento costruito due semirette perpendicolari ai lati del rettangolo (si veda la figura in blu). L'unica eccezione si presenta quando il segmento costruito è l'altra diagonale del rettangolo (anzi quadrato, in questo caso) costruito inizialmente, in questo caso l'asse del segmento $\overline{AB}$ per il tassista coincide con l'asse di Euclide (si veda la figura in rosso). Concludiamo lo svolgimento con le illustrazioni esemplificative.



Il precedente disegno visualizza i ragionamenti fatti nello svolgimento dell'esercizio.

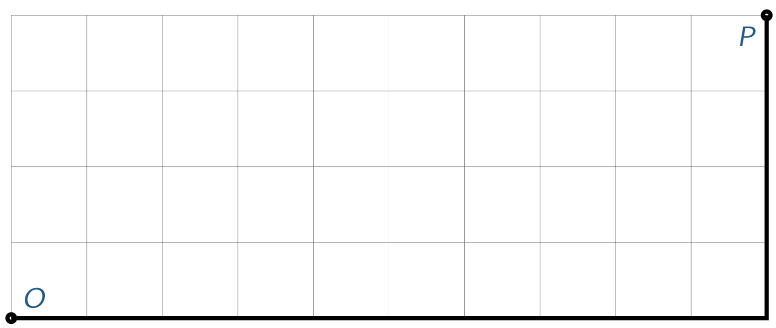
Esercizio 14. *Si disegni l'ellisse $\{d_T(P,A) + d_T(P,B) = 10\}$ dove $A \equiv (2,2)$ e $B \equiv (-2,-2)$.*

Svolgimento: Per risolvere l'esercizio è sufficiente rileggere con attenzione l'esercizio in cui abbiamo introdotto la defìnzionedi ellisse e studiato sia il caso euclideo che il caso della geometria del tassista: la difficoltà in questo caso risiede nel fatto che i fuochi non si trovano su una retta parallela ad uno degli assi. Come variazione sul tema proponiamo, nelle figure che seguono, i disegni di alcune ellissi: si individui tra di esse l'ellisse del testo dell'esercizio e si scrivano le equazioni di tutte le altre ellissi rappresentate.

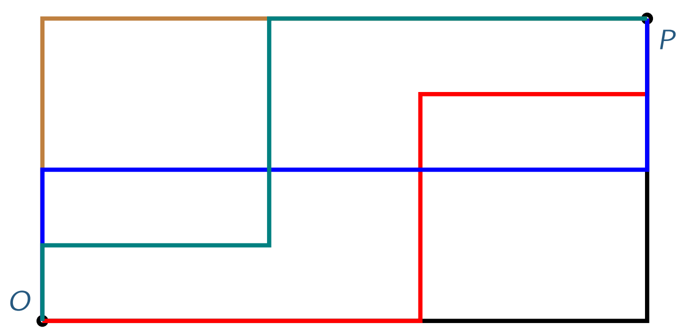


Esercizio 15. *Dati due punti nel piano si individui il percorso del tassista più breve che li connette.*

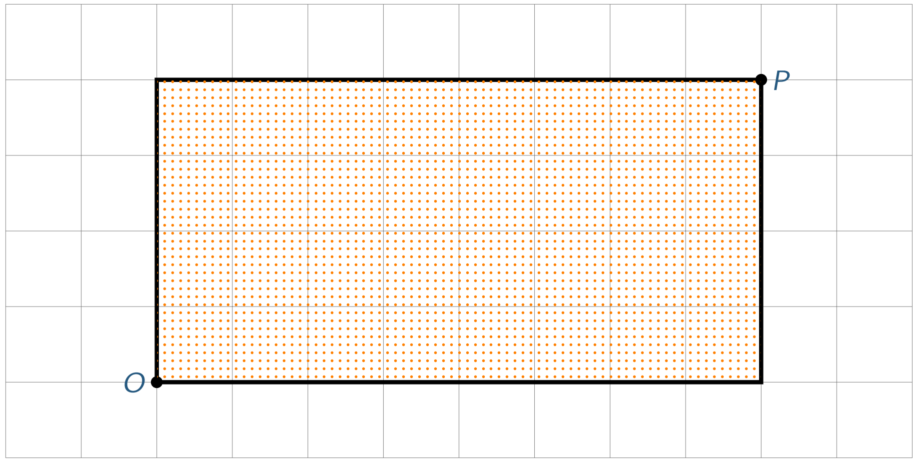
Svolgimento: A meno di traslazioni possiamo pensare che i due punti siano $O \equiv (0,0)$ e $P \equiv (x,y)$, naturalmente abbiamo che $d_T(O,P) = |x| + |y|$ e notiamo subito che una soluzione al problema è la seguente



visto che non è possibile costruire percorsi più brevi. L'osservazione interessante (che non è possibile ripetere nella geometria euclidea) è che il percorso più breve tra due punti può non essere unico, come mostra la figura successiva in cui rappresentiamo alcuni percorsi minimi.

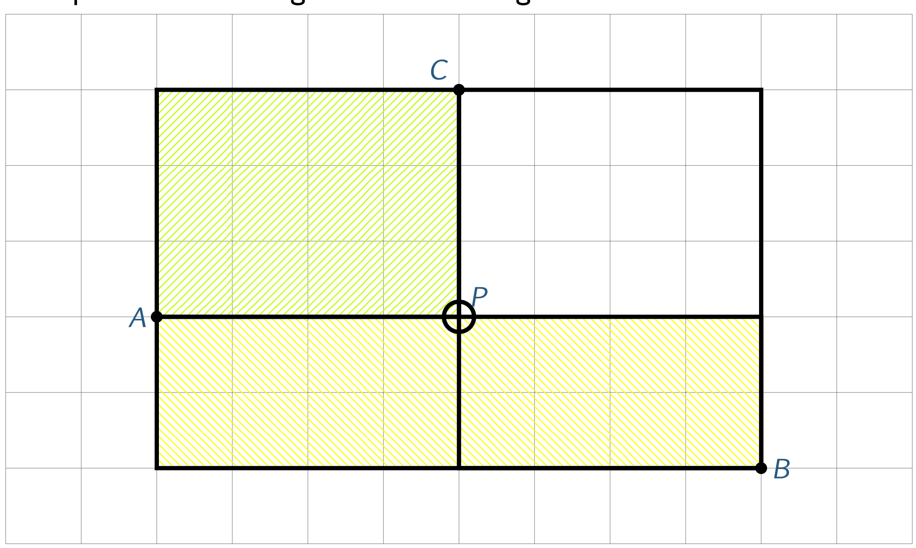


È facile verificare che tutte le spezzate che connettono O a P interne al rettangolo giallo (figura seguente) che "non tornano indietro" sono tragitti minimi tra i due punti.
In linguaggio più tecnico i percorsi minimi vengono detti geodetiche, e il rettangolo con lati paralleli agli assi del sistema di riferimento avente i punti su una diagonale verrà indicato come rettangolo geodetico.



ESERCIZIO 16. *Si trovi il punto P del piano $\mathbb{R}^2$ che rende più piccola possibile la quantità $d_T(P,A) + d_T(P,B) + d_T(P,C)$, dove $A \equiv (2,3)$, $B \equiv (10,1)$ e $C \equiv (6,6)$.*

Svolgimento: La soluzione di questo quesito è abbastanza semplice (l'equivalente euclideo è più difficile e può essere trovato nell'esercizio successivo) e si basa sulla precedente osservazione che, fissati due punti nel piano, il rettangolo con lati paralleli agli assi cartesiani avente il segmento individuato dai due punti come diagonale circoscrive tutti i percorsi minimi che uniscono i due punti.
Tracciamo i tre rettangoli geodetici relativi alle coppie di punti (A,B), (B,C) ed (A,C). Tranne casi particolari, nella procedura abbiamo tracciato var percorsi che devono necessariamente avere almeno un punto in comune: chiamato P tale punto cerchiamo di provare che è il punto che cercavamo.
Se ci spostiamo da P lungo una qualsiasi direzione, abbiamo che resta costante la somma delle distanza del tassista da due punti, ma deve aumentare la terza perché stiamo uscendo da uno dei rettangoli geodetici (a meno che due punti siano allineati), questo implica che il punto P rende minima la somma delle tre distanze. Per suffragare il nostro ragionamento inseriamo un disegno in cui sono evidenziati i punti e i tre rettangoli utilizzati nel ragionamento.



Per concludere: nel caso in esame il punto ottimale P trovato ha coordinate $(6,3)$.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[1] H.S.M. Coxeter, Introduction to Geometry, John Wiley & Sons Inc 1969.
[2] E.F. Krause, Taxicab Geometry An Adventure in Non-Euclidean Geometry, Dover Publications Inc. 1975.

C
K