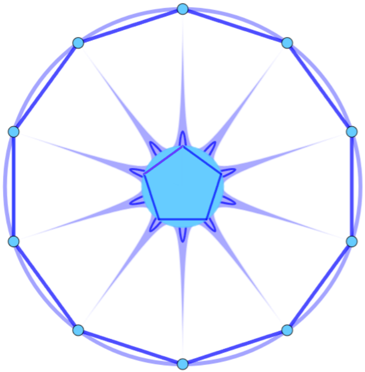
Liceo Talete - Sapienza Università di Roma



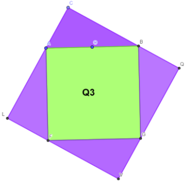
Costruzione dei poligoni regolari e soluzioni delle equazioni ciclotomiche

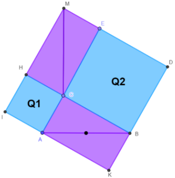
Silvia Lanaro

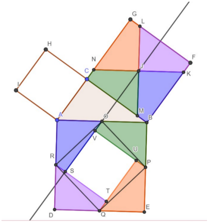
Tavola dei Contenuti

Perché le costruzioni riga e compasso?

Considerazioni nate durante la sperimentazione delle attività proposte nel progetto *"Argomentare e dimostrare"*[1]







Analisi del lavoro degli studenti

St: *Prof, ma come facciamo a sapere che effettivamente la costruzione sia corretta? Non ne possiamo avere la certezza a meno che…*

DU: *Anche qui l'osservazione è molto opportuna, anche se non è chiaro cosa si intenda per costruzione. Nel contesto della geometria euclidea una costruzione è una successione di istruzioni per realizzare una figura con riga e compasso. Qui sembra si faccia riferimento a "spostamenti". Le figure ottenute con questi spostamenti si possono costruire con riga o compasso o si è in presenza di una diversa nozione di costruzione? Per esempio, come costruisco con riga e compasso l'immagine di una figura che traslo da un punto A a un punto B?*

DC: *interessante questa riflessione sulla costruzione, noto che c'è molta confusione sulle costruzioni (credo a causa della poca attenzione che ho deciso di dare alle costruzioni).*

La lettura di Euclide

Agli alunni é stato chiesto, divisi in gruppi, di riscrivere la dimostrazione precedentemente assegnata utilizzando le proposizioni del primo libro degli Elementi di Euclide, rimanendo fedeli al linguaggio utilizzato da Frajese nell'edizione UTET[4].

Il lavoro degli studenti

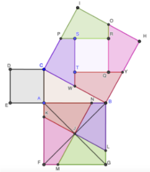
PROPOSIZIONE 47. (Secondo la strategia dimostrativa di Perigal)

Nei triangoli rettangoli il quadrato costruito sul lato opposto all'angolo retto è uguale alla somma dei quadrati costruiti sui lati che comprendono l'angolo retto.

Sia ABC un triangolo rettangolo avente l'angolo BAC retto;
dico che il quadrato di BC è uguale alla somma dei quadrati di BA e AC.
Infatti si descrivano il quadrato BCIH su BC, ABGF su AB e ACDE su AC (I,46).
Si traccino le diagonali (termine utilizzato nel commento di Frajese nella I,34) AG e BF del quadrato AG[1]. La diagonale AG è uguale a BF (I,34.2) e esse sono perpendicolari (DEF. X) tra loro (I,34.2). I punti che dividono a metà (I,10) le diagonali AG e FB coincidono in J (FJ, JB appartengono alla stessa retta (I,14) e AJ, JG appartengono alla stessa retta(id).
Quindi AJ, GJ, JF, JB sono uguali tra loro (Noz. Com. VI ovvero metà di cose uguali sono uguali tra loro) e le diagonali fungono anche da rette che, cadendo sui lati opposti paralleli (DEF. XXIII e XXII.1) del quadrato (DEF, XXII.1), formano angoli alterni interni uguali (I,29).
Si traccino poi due rette terminate passanti per J, di cui una è parallela (I,31) e l'altra perpendicolare (I,11) al lato opposto all'angolo retto del triangolo ABC. Esse sono quindi anche perpendicolari (DEF. X) tra loro e incontrano i lati del quadrato nei punti K, N, L, M.

Si individuino poi i quattro quadrilateri (DEF.XIX), formatasi dalle due rette terminate appena tracciate e dai lati del quadrato, i quali hanno ciascuno due angoli retti (uno quello del quadrato, l'altro quello in J formatosi dall'intersezione delle due rette terminate).

1. Euclide nomencla con tutte e 4 le lettere il quadrato sul lato opposto all'angolo retto mentre con solo due lettere (ovvero quelle che si trovano in posizione opposta tra loro) i parallelogrammi e i quadrati che si trovano sui lati che contengono gli angoli retti



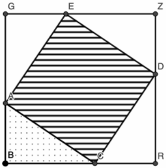
Si prendano poi in considerazione i triangoli FJM e NJB. Essi sono uguali (I,26) poichè hanno FJ uguale a JB (I,34.2), l'angolo FJM uguale all'angolo NJB (I,15) e l'angolo JFM uguale all'angolo JBN (I,29).
Si applichi lo stesso procedimento ai triangoli AKJ e JLG, uguali tra loro (I, 26).
Si noti allora che anche i triangoli NJB e JLG sono uguali (I,26) poiché JG è uguale a JB, perchè metà delle diagonali del quadrato (I,34.2), l'angolo NBJ è uguale all'angolo JGL perché le diagonali sono bisettrici (I,34.1 e I,34.2) e l'angolo GJL è uguale all'angolo BJN (Noz. Com. III): poiché sottraendo agli angoli retti MJL e AJB, tra loro uguali (Postulato IV), gli angoli uguali AJN e MJG (I,15) i resti saranno uguali. Di conseguenza i triangoli AKJ, NBJ, JLG, FMJ sono uguali tra loro (Noz. Com. I).

Si può poi dimostrare che i triangoli ANJ e JLB sono uguali (I, 8) poiché AJ è uguale a JB (I, 34.2), NJ è uguale a JL (perchè lati corrispondenti di triangoli uguali) per come fu dimostrato, AN è uguale a LB (Noz. Com. III): dato che AB uguale a BG (DEF. XXII) e NB è uguale a LG per la dimostrazione precedente, la sottrazione tra questi sarà uguale. Poiché

Il lavoro degli studenti

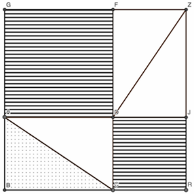
Nei triangoli rettangoli il quadrato del lato opposto all'angolo retto è uguale alla somma dei quadrati dei lati che comprendono l'angolo retto.

Sia ABC un triangolo rettangolo avente l'angolo retto ABC; dico che il quadrato AC è uguale alla somma dei quadrati AB e BC. Dato un triangolo rettangolo ABC prolungo (I. post. II) il lato BA, sul suo prolungamento traccio un segmento AG pari a BC (I.2 e I.3), ora prolungo il lato BC, sul suo prolungamento traccio un segmento CR pari a AB(I.2 e I.3). Traccio dal vertice G una parallela al lato BR(I.31) e dal vertice R una parallela al lato BG(I.31). Il punto d'incontro delle due parallele crea il quadrato BRGZ poiché ABC angolo è retto, l'angolo BGZ è retto perché è coniugato interno delle parallele GZ e BR con trasversale GB perpendicolare a BR (I,29). Ripeto il procedimento per i restanti 2 angoli. Sul lato GZ trasporto AB e CB andando a formare le rette GE e EZ; sul lato ZR trasporto AB e CB andando a formare due rette ZD e RD (I, 2 e I,3).
BRGZ è equiangolo e equilatero perché i lati sono uguali perché somme di cose uguali sono uguale (nozione comune II).



Il quadrato ACDE ha i lati ED, EA, AC e DC uguali perché ipotenuse di triangoli congruenti infatti: il triangolo ABC è uguale a GEA, a EZD e a DCR perché hanno tutti un angolo retto perché GZRB è un quadrato, CR uguale ad AB, uguale a GE, uguale a ZD per le costruzioni precedenti e BC uguale a GA, uguale a EZ, uguale a DR per le costruzioni precedenti (I.4) .
EAC è uguale a un angolo retto per la seguente dimostrazione: sottraendo all'angolo BAG l'angolo BAC a cui è stato sommato l'angolo GAE si forma un angolo retto quindi di conseguenza l'angolo EAC è uguale a un angolo retto. Dopodiché ripeto il procedimento per tutti gli altri angoli cioè: ACD, CDE e DEA. Grazie alle seguenti dimostrazioni si può dimostrare che il quadrilatero ACDE è un quadrato (I.22) perché è equilatero e equiangolo;
Infine possiamo dire che il quadrato GZBR è uguale a 4 triangoli ABC più il quadrato EDAC (nozione comune II).

costruisco nel quadrato GZBR una retta passante per A parallela a BR (I, 31), traccio per C una retta parallela a ZR (I, 31), congiungo con una retta i punti AC e ZD. ADC è uguale al triangolo ABC perché l'angolo DAC è uguale all'angolo BCA (I, 29 AJ parallela a BR con trasversale AC), DCA è uguale all'angolo CAB (I, 29 AJ parallela a BR con trasversale AC) e AC è in comune (I, 26). Applico la stessa dimostrazione ai triangoli FZD e ZDJ per dimostrarne l'uguaglianza.
ABC è uguale al triangolo FZD perché, FZCR è un parallelogrammo poiché ha FC parallelo a ZR per costruzione e FZ parallelo a CR perché parti di GZ e BR che sono parallele tra loro perché GZBR quadrato ed essendo equilatero è anche un parallelogrammo, quindi essendo AB uguale a CR per la prima costruzione sarà uguale anche ad FZ (nozione comune I), stesso ragionamento per dimostrare che GAFD è un parallelogrammo, quindi GA è uguale a FD ed essendo GA uguale a CB per la prima costruzione FD è uguale a BC (nozione comune I), FZJ è uguale all'angolo ABC perché i quadrati sono equiangoli (definizione XXII), ZFD è uguale all'angolo FZJ perché angoli corrispondenti delle rette parallele FD e ZJ con trasversale FZ perpendicolare a ZJ (I,29), ZFD uguale all'angolo ABC (nozione comune I) ABC è uguale al triangolo FZD (I, 4) che è uguale a ZDJ e a ADC (nozione comune I)



Sia RJD l'angolo esterno di DJZ perché JR è un prolungamento di ZJ, il triangolo DZJ ha l'angolo retto per costruzione in DJZ, essendo l'angolo esterno uguale alla somma degli angoli opposti all'angolo relativo ad esso ed essendo la somma degli angoli di un triangolo uguale a due retti (I.32), l'angolo è retto. Applico questo procedimento agli altri angoli CDJ, ADF, DCR, DFG, GAD;
il lato DC è uguale a DJ, e il lato AD è uguale a FD (nozione comune VII[1] perché rettangoli congruenti per costruzione) (i rettangoli e i quadrati sono anche parallelogrammi perché hanno gli angoli opposti congruenti) (I.34 nota 29 I, definizione XXII), quindi i rettangoli hanno i lati opposti uguali), DJCR è un rettangolo perché ha tutti gli angoli retti, e avendo 2 lati consecutivi uguali è anche un quadrato (per la proprietà dei lati del romboide I, definizione XXVII). GFAD è un rettangolo perché ha tutti gli angoli retti, e avendo 2 lati consecutivi congruenti è anche un quadrato (per la proprietà dei lati del romboide I, definizione XXVII).

Le costruzioni degli Elementi di Euclide con Geogebra

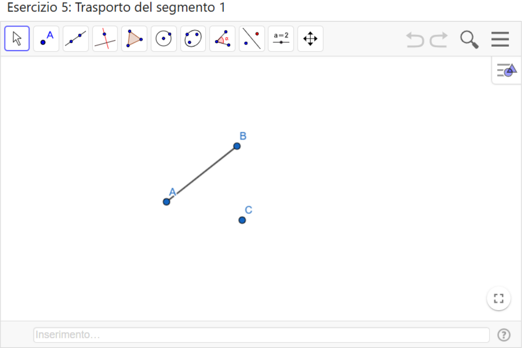
Geogebra dà la possibilità di costruire strumenti personalizzati; questo consente di poter costruire in modo autonomo gli strumenti che corrispondono alle costruzioni presenti nelle proposizioni degli Elementi di Euclide.

Primo passo: personalizzare gli strumenti Geogebra. Lasciamo solamente i seguenti strumenti:

Stumenti	**Postulato**	**Αἰτήματα**
Segmento	I. Si possa condurre una linea retta da un punto ad ogni altro punto	Ἐφ᾽ οὗδήποτε σημείου ἐπὶ πᾶν σημεῖον εὐθεῖαν γραμμὴν ἄγειν.
Retta	II. Una retta terminata si possa prolungare continuamente in linea retta	Καὶ πεπερασμένην εὐθεῖαν κατὰ τὸ συνεχὲς ἐπ᾽ εὐθείας ἐκβαλεῖν.
Circonferenza	III. Si possa descrivere un cerchio con qualsiasi centro ed ogni distanza	Καὶ παντὶ κέντρῳ καὶ διαστήματι κύκλον γράφεσθαι

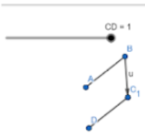
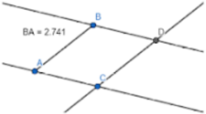
Le richieste fatte agli studenti

Il trasporto del segmento 1 Costruisci un segmento CD che sia congruente al segmento AB. Potete usare qualsiasi comando vogliate. Prova a farlo nella finestra GeoGebra "Trasporto del segmento 1".



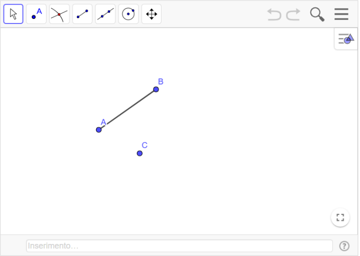
Il trasporto di un segmento: risposte degli studenti

Le costruzioni degli studenti

	TRASLAZIONE
	PARALLELOGRAMMA
	USO DELLO STRUMENTO DI MISURA

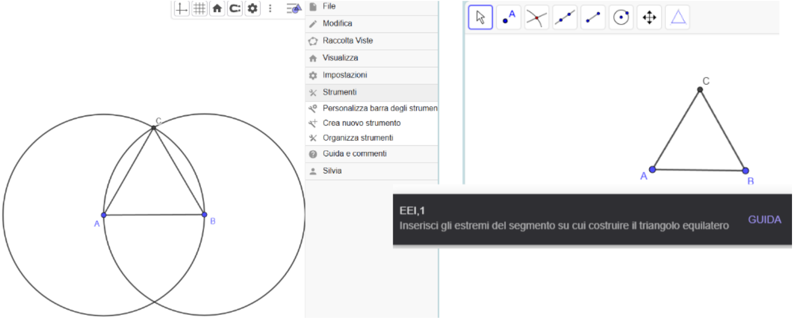
Stessa richiesta senza strumenti

Costruire un triangolo equilatero
Costruisci, se possibile, nella finestra GeoGebra "Costruisci il triangolo equilatero", il triangolo equilatero di lato assegnato usando solo gli strumenti disponibili.
Trasporto del segmento 2
Ora, costruisci un segmento CD che sia congruente al segmento AB usando solo gli strumenti a disposizione nella finestra GeoGebra che segue.



La prima costruzione

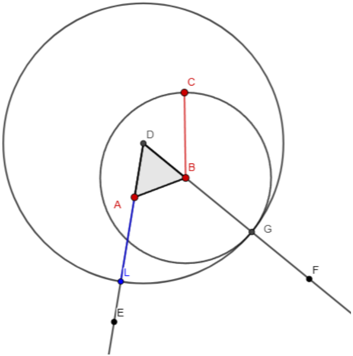
Su una retta terminata costruire un triangolo equilatero.



1. Crea un nuovo strumento.
2. Inserisci oggetti iniziali.
3. Inserisci oggetti finali.
4. Inserisci il nome dello strumento, la guida per utilizzarlo, l'icona per il nuovo strumento

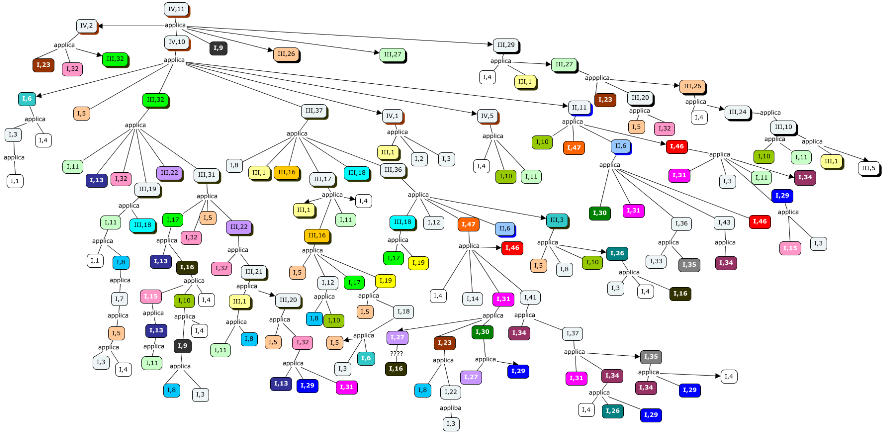
Il trasporto di un segmento: la proposizione II degli Elementi di Euclide

Sia dato il punto A e il segmento BC. Si deve costruire con un estremo in A una retta uguale a BC



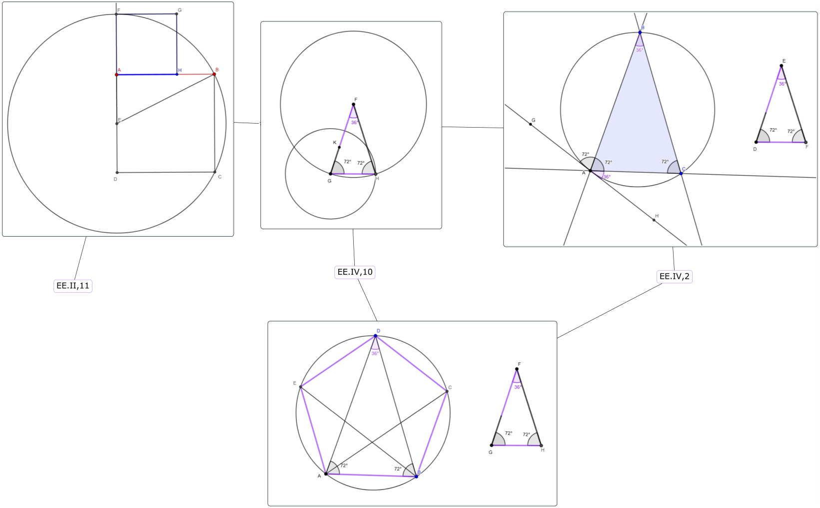
A.Brigaglia, M.A. Raspanti, e E. Rogora. L'uso di un software di geometria dinamica nella formazione dei futuri insegnanti[2].

Perché il pentagono?

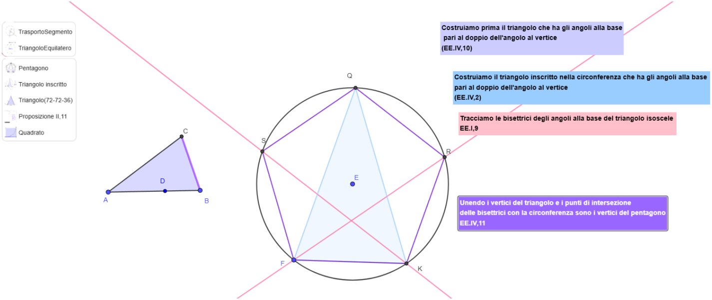


Costruzione del pentagono regolare inscritto

La Proposizione IV,11 richiede molti passi costruttivi.



La costruzione del pentagono regolare inscritto

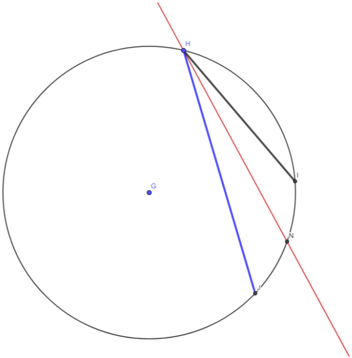


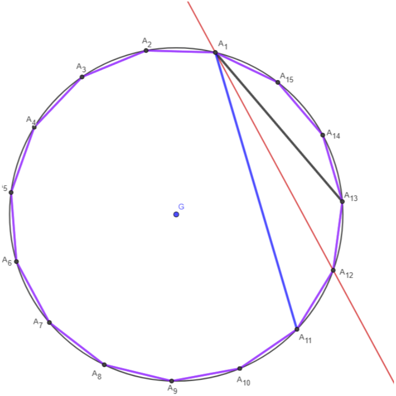
Costruzione Pentagono

Foglio per costruzione con strumenti

La costruzione del Pentadecagono

Pentadecagono poligono regolare a 15 lati





Foglio Costruzione Pentadecagono

Materiali

Classe Proposizione II,11

Esempio di attività.

Alcuni problemi Problemi Flatlandia

Elementi di Euclide Libri I-VI[3]

Elementi di Euclide libi XI-XIII (pag. 267 costruzione pentagono di Tolomeo)

Un esempio dall'attività sul pentagono

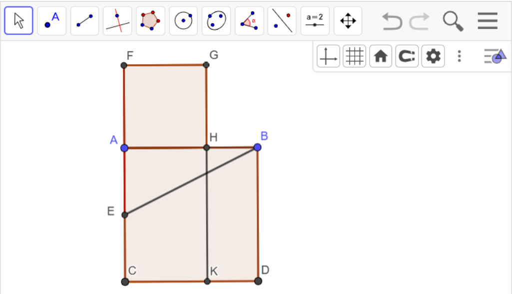
Proposizione II.11

Dividere una retta data in modo che il rettangolo compreso da tutta la retta e da una delle parti sia uguale al quadrato della parte rimanente. Sia AB la retta data; si deve dunque dividere AB in modo che il rettangolo compreso da tutta la retta e da una delle parti sia uguale al quadrato della parte rimanente.

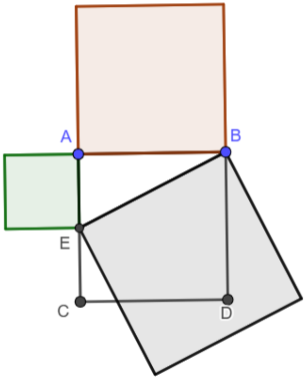
Fare la costruzione

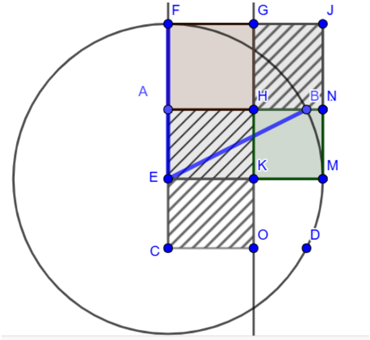
Costruzione

Infatti, si descriva su AB il quadrato ABDC (I.46 proposizione in cui Euclide costruisce il quadrato), si divida AC per metà (I.10: costruzione del punto medio) e si tracci la congiungente BE; si prolunghi CA oltre A, e sul prolungamento si ponga EF uguale a BE(post III :circonferenza avente centro e passante per un punto), su AF si descriva il quadrato AFGH, e si prolunghi GH oltre H sino a K: dico che AB è stata divisa nel punto H in modo che il rettangolo compreso da AB, BH risulti uguale al quadrato AH.



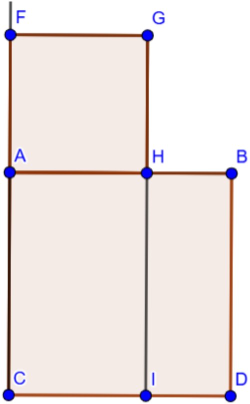
Ricostruire la dimostrazione attraverso l'osservazione delle figure





Osserva le figure: $q(BE) = \ldots$ e $q(EF) = \ldots$ essendo $q(EF) = q(BE)$ avremo che $r(CF, FG)$ e $q(AB)$...

Ricostruire la dimostrazione attraverso l'osservazione delle figure



Dalla figura emerge che $r(AB, BH)$ e $q(AH)$ sono... Seguendo le osservazioni precedenti prova a riscrivere la dimostrazione della proposizione II,11.

Una nuova domanda

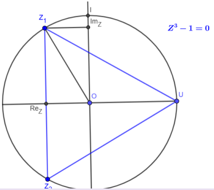
Quali sono i poligoni regolari iscrivibili in una circonferenza con riga e compasso?

Problema della ciclotomia

Il problema della costruzione del poligono regolare di n lati, ovvero il problema della ciclotomia, cioè la divisione della circonferenza in n parti uguali, è equivalente alla risoluzione in Z dell'equazione $X^n = 1$ (equazione ciclotomica). É merito di Gauss (1777-1855) l'aver dimostrato che tale equazione è risolubile per radicali quadratici (quindi è possibile costruire con riga e compasso il poligono regolare di n lati) se e solo se n è un numero nella forma:

$$n = 2^{\mu} \cdot (2^k + 1) \cdot (2^l + 1)...(2^m + 1)$$

con $\mu \geq 0$ e i fattori parentesi numeri primi tutti diversi. Osserviamo che affinché un numero della forma $2^k + 1$ sia primo, è necessario che k sia una potenza di due. I numeri della forma $2^{(2^h)} + 1$ sono detti primi di Fermat (3,5,17,257,65537).[5]



Equazione ciclotomica $x^5 = 1$

Scegliamo $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{5}}$ soluzione dell'equazione ciclotomica $x^5 = 1$ allora le soluzioni diverse dall'unità si possono scrivere in questo modo:

$$\zeta, \quad \zeta^2, \quad \zeta^3, \quad \zeta^4$$

Essendo ζ radice dell'equazione ciclotomica avremo che essendo:

$$x^5 - 1 = 0 \to \frac{x^5 - 1}{x - 1} = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0 \tag{1}$$

quindi si ha per 1

$$\zeta^4 + \zeta^3 + \zeta^2 + \zeta = -1 \tag{2}$$

Accoppiamo le radici in questo modo

$$\zeta^2 + \zeta^3 = \alpha \tag{3}$$

$$\zeta + \zeta^4 = \beta \tag{4}$$

Pertanto per 2 avremo

$$\alpha + \beta = -1 \tag{5}$$

Invece possiamo calcolare

$$\alpha \cdot \beta = (\zeta^2 + \zeta^3)(\zeta + \zeta^4) = \zeta^3 + \zeta^4 + \zeta + \zeta^2 = -1 \tag{6}$$

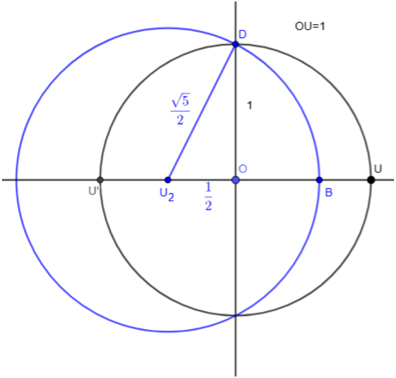
Risoluzione $x^5 = 1$ e costruzione pentagono(1)

Essendo $\alpha + \beta = -1$ e $\alpha \cdot \beta = -1$ possiamo trovare α e β risolvendo l'equazione di secondo grado.

$$x^2 + x - 1 = 0 \tag{7}$$

cioè risolvere graficamente il seguente sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + x - 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$



Risoluzione $x^5 = 1$ e costruzione pentagono(2)

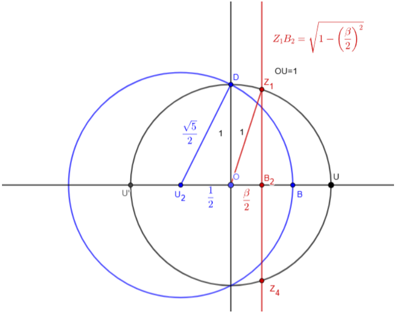
Quindi da 4 cioè $\zeta + \zeta^4 = \beta$ moltiplicando tutto per ζ si avrà:

$$1 + \zeta^2 = \beta\zeta \rightarrow \zeta^2 - \beta\zeta + 1 = 0 \quad (8)$$

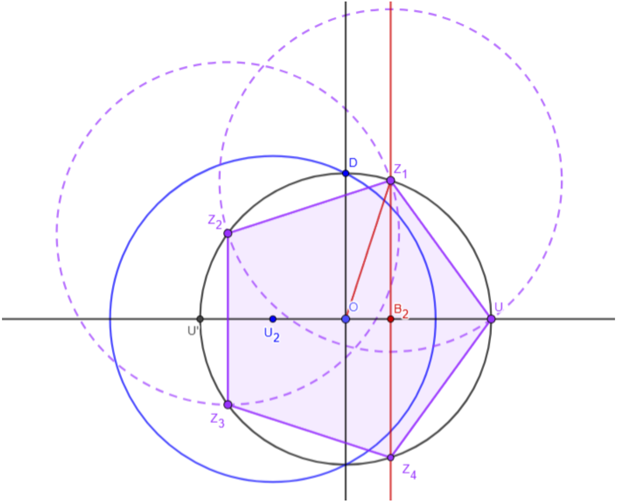
Risolvendo questa equazione troveremo la soluzione

$$\zeta = \frac{\beta}{2} + i\frac{\sqrt{-\beta^2 + 4}}{2} \qquad (9)$$

quindi ζ è un numero complesso che ha come parte reale $\frac{\beta}{2}$ e come parte immaginaria $\sqrt{1 - \left(\frac{\beta}{2}\right)^2}$. Graficamente i punti ζ e ζ^2 sono le intersezioni della retta parallela all'asse y per $\frac{\beta}{2}$ con la circonferenza unitaria.

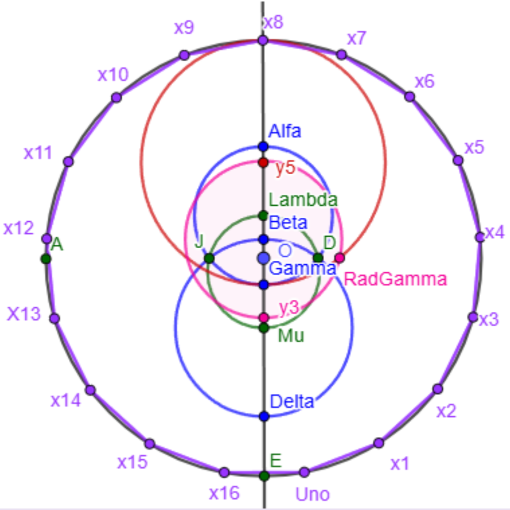


Il pentagono regolare



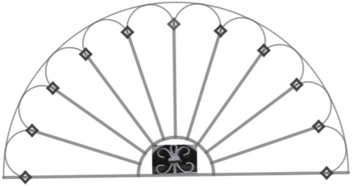
Eptadecagono $x^{17} = 1$

Costruzione eptadecagono



I poligoni regolari nella città

Riprodurre le porte di Trastevere



Alcune Chiese

SANTA MARIA IN ARACOELI

CHIESA GIUBILARE *JUBILEE CHURCH*

L'EUROPA A ROMA
UNIONE EUROPEA

In età romana il Campidoglio fu scelto fra i sette colli come luogo elevato per i templi pagani, a ricordare che l'uomo guarda in alto, per decifrare il senso della vita.

Nell'alto medioevo sorse una prima chiesa, legata alla leggenda dell'apparizione della Madonna ad Augusto: si immaginava che la cultura classica avesse già intuito la fede cristiana.

La scalinata fu costruita nel 1348 da Cola di Rienzo per ringraziare la Vergine per aver risparmiato Roma dalla peste: il Risorgimento gli eresse una statua, ritenendolo a torto un eroe anticlericale.

Nella basilica si legge l'iscrizione SPQR, perché chiesa del Senato e del Popolo Romano. Il Palazzo del Campidoglio è il più antico municipio d'Italia. La piazza, risistemata da Michelangelo da Della Porta, ha al centro la statua di Marco Aurelio. Il Rinascimento si dichiarava erede della cultura classica oltre che del cristianesimo.

La facciata dell'Aracoeli è rimasta incompiuta, quando i francescani la ricostruirono nel 1285-1287, con materiali di spoglio.

La Cappella Bufalini, la prima a destra, venne affrescata nel 1485 circa da Pinturicchio con storie di san Bernardino da Siena, che abitò anche all'Aracoeli.

L'Aracoeli conserva le reliquie di santa Elena, madre di Costantino, e di san Ginepro, compagno di san Francesco noto per la sua ilarità, ma anche dell'ultima regina di Bosnia, la beata Caterina, che, con l'invasione turca, fu esiliata a Roma dove si fece terziaria francescana.

In una cappella è il Santo Bambino, scolpito a Gerusalemme alla fine del XV secolo: a lui arrivano le lettere dei bambini di tutto il mondo.

Il convento fu abbattuto dal Regno d'Italia, per sostituirlo con l'Altare della Patria. Negli stemmi dei Comuni, alla base del cavallo, si ritrovano i simboli cristiani di cui la storia delle città italiane è intrisa, come il Leone di San Marco di Venezia o la Croce di Genova e di Milano.

In Campidoglio, nel 1957, vennero firmati i Trattati di Roma, l'atto di nascita della Comunità europea, a ricordare che le radici della civiltà europea erano al Campidoglio.

EUROPE IN ROME
THE EUROPEAN UNION

In Ancient Roman times, the Capitoline Hill was chosen from among the seven hills of the city as a suitably elevated spot for pagan temples, to remind people that mankind looks upwards to decipher the meaning of life.

In the early Middle Ages, the first church was built here, which was linked to the legend of the apparition of Our Lady to Emperor Augustus; the idea being that classical culture had already intuited, in some way, the Christian faith.

The staircase was built in 1348 by Cola di Rienzo to thank the Virgin Mary for saving Rome from the plague. At the time of Italian Unification, a statue to him was erected, wrongly portraying him as an anticlerical hero.

In the basilica you can read the inscription SPQR – Senatus Populusque Romanus *– because this is the church of the Senate and the Roman People. The Palazzo del Campidoglio is the oldest town hall in Italy. The square in front of it, redesigned by Michelangelo, contains the statue of Marcus Aurelius at its center; the Renaissance declared itself the heir of classical culture as well as Christianity!*

The façade of the Aracoeli remains unfinished. Indeed when the Franciscans rebuilt it in 1285-1287, they used scavenged materials.

The Bufalini Chapel, the first on the right, was frescoed around 1485 by Pinturicchio with stories of Saint Bernardine of Siena, who also lived at the Aracoeli.

The Aracoeli preserves the relics of Saint Helen, mother of Constantine, of Saint Juniper, companion of Saint Francis known for his humor, and those of the last Queen of Bosnia, Blessed Catherine, who, after the Turkish invasion of her homeland, was exiled to Rome where she became a Franciscan tertiary.

In a side chapel is the Bambino *or Holy Child, sculpted in Jerusalem at the end of the 15th century: letters from children all over the world are sent to Baby Jesus even today and reach him here.*

The original convent was demolished by the Kingdom of Italy, to be replaced with the Victor Emmanuel Monument or (Altare della Patria). *In the coats of arms of the various Italian cities, at the base of the huge statue of the horse, can be seen the symbols of Christianity in which the history of so many Italian cities is steeped, such as the Lion of St. Mark of Venice or the Cross of Genoa and Milan.*

In the Campidoglio, in 1957, the Treaties of Rome were signed, the 'birth certificate' of the European Community, to remind everyone that the roots of European civilization lie here in the Campidoglio.

SANTA MARIA SOPRA MINERVA

CHIESA GIUBILARE *JUBILEE CHURCH*

DONNE PATRONE D'EUROPA E DOTTORI DELLA CHIESA
SANTA CATERINA DA SIENA

Il titolo sopra Minerva ricorda la dea della Sapienza, poiché qui sorgeva un antico tempio a lei dedicato. Anche l'elefantino realizzato dal Bernini ricorda che è necessaria «una mente robusta per sostenere una solida sapienza»

I domenicani vi giunsero nel 1256 ed edificarono l'insula domenicana che comprendeva l'intero isolato – successivamente requisito prima dai francesi rivoluzionari e poi, nell'Ottocento, dal regno d'Italia – di cui facevano parte l'università poi Angelicum, i chiostri e la Biblioteca Casanatense. San Domenico è spesso rappresentato, come San Francesco, nell'atto di sostenere il Laterano: riformò la Chiesa anche tramite l'insegnamento. Domenicani e francescani costituirono i due ordini mendicanti che rinnovarono la chiesa medioevale. È nota la tradizione, poi anche dantesca, dei due ordini che esaltano ognuno il fondatore dell'altro.

A Santa Maria sopra Minerva Caterina da Siena, terziaria domenicana, veniva a pregare per la pace e l'unità della Chiesa e perché il Papa tornasse a Roma da Avignone. La santa è sepolta nell'altare centrale; la stanza in cui morì nel 1380 è stata trasportata dietro la sacrestia.

La basilica è gotica, un unicum per Roma, dove il medioevo è stato nascosto dal Rinascimento e dal Barocco. Conobbe poi trasformazioni rinascimentali, ma la sistemazione attuale è Ottocentesca.

Vi è sepolto Beato Angelico, frate domenicano e patrono degli artisti, che aveva già dipinto il Convento di San Marco a Firenze, di cui era frate.

Di Antoniazzo Romano è l'Annunciazione con le ragazze povere a cui la Confraternita donava la dote.

Dietro l'altare sono le tombe dei due papi Medici, Leone X, figlio di Lorenzo il Magnifico, e Clemente VII, il pontefice del Sacco di Roma.

Nel transetto di destra è la Cappella Carafa, dedicata a San Tommaso d'Aquino, affrescata fra il 1489 e il 1493 da Filippino Lippi.

Di Michelangelo è il Cristo risorto a fianco dell'altare centrale.

Nella basilica è la Cappella Capranica: nella festa di Sant'Enrico di Uppsala, patrono della Finlandia, è luogo di liturgie ecumeniche.

PATRONESSES OF EUROPE AND DOCTORS OF THE CHURCH
SAINT CATHERINE OF SIENA

The title 'Sopra Minerva' of this church recalls the ancient goddess of Wisdom since a temple dedicated to her once stood here. The little elephant sculpted by Bernini which stands in the square outside also recalls that "a robust mind is needed to sustain solid wisdom."

The Dominicans arrived here in 1256 and built the Dominican 'insula' or campus, which took up the entire block; it was requisitioned first by the French revolutionaries and, in the 19th century, by the Kingdom of Italy. It included the university, which was to become the Angelicum, the cloisters, and the Casanatense Library. Saint Dominic is often represented, like Saint Francis, in the act of holding up the Church symbolized by the Lateran Palace and Basilica ... He – like St Francis – also reformed the Church through his teaching. The Dominicans and Franciscans constituted the two mendicant orders which renewed the medieval church. The tradition, taken up by Dante, of the two orders each exalting the founder of the other is well known.

At Santa Maria sopra Minerva, *Catherine of Siena, a Dominican tertiary, came to pray for the peace and unity of the Church and for the Pope to return to Rome from Avignon. She is buried under the central altar and the room where she died in 1380 has been moved behind the sacristy.*

The basilica is Gothic in style, unique in Rome, where the architecture of the Middle Ages was largely replaced by Renaissance and Baroque buildings, but the current arrangement is from the nineteenth century.

Beato Angelico, a Dominican friar and patron of artists, who had already painted the Convent of San Marco in Florence, where he was a friar, is also buried here.

The Annunciation with poor girls is by Antoniazzo Romano.

Behind the altar are the tombs of the two Medici popes, Leo X, son of Lorenzo the Magnificent, and Clement VII, the pontiff at the time of the Sack of Rome.

In the right transept is the Carafa Chapel, dedicated to Saint Thomas Aquinas, frescoed between 1489 and 1493 by Filippino Lippi.

The Risen Christ next to the central altar is by Michelangelo.

The basilica houses the Capranica Chapel: on the feast of St. Henry of Uppsala, patron saint of Finland, it is used for ecumenical liturgies.

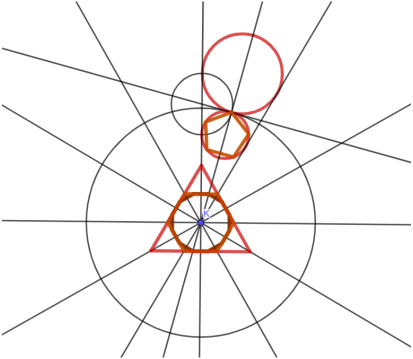
Chiese nascoste

Uno dei rosoni di Santa Maria della Minerva

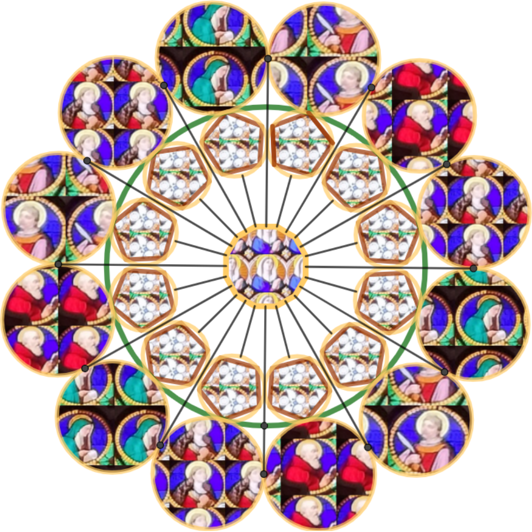
Riprodurre i Rosoni

1. Circoscrivo al cerchio contenente l'immagine di Maria un dodecagono.
2. Costruisco la seconda circonferenza con raggio triplo del raggio della circonferenza iniziale
3. Costruisco le circonferenze contenenti l'Angelo e inscrivo al loro interno un pentagono.
4. Costruisco le circonferenze contenenti i Santi.

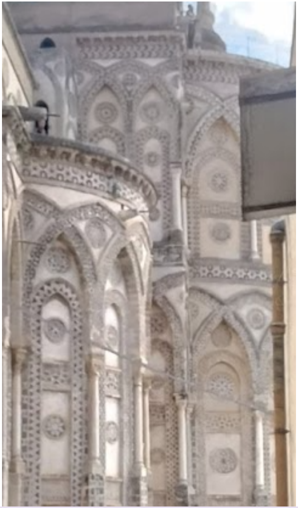
La costruzione di uno spicchio del rosone

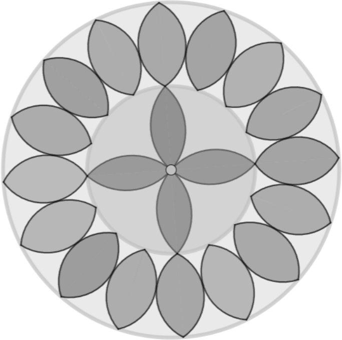


Quasi il rosone



Riguardare le foto delle vacanze: Duomo di Monreale





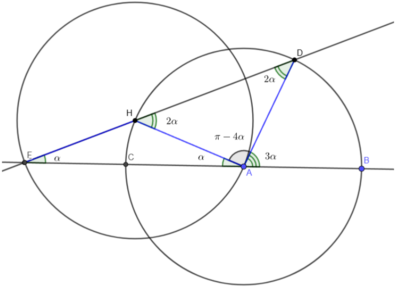
Altri poligoni non costruibili riga e compasso

Figura: 7 parti

Figura: 18 parti

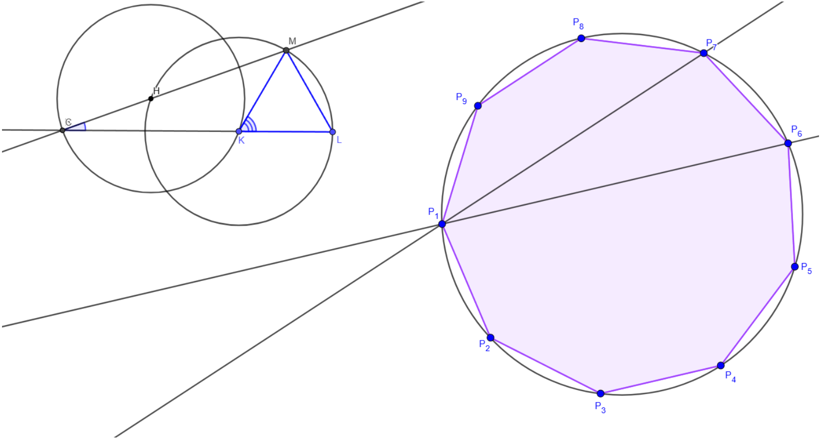
La trisezione dell'angolo

1. Dato l'angolo di vertice A traccio la circonferenza di centro A e raggio AB individuo $\angle(BAD)$;
2. Considero il punto H sulla circonferenza tracciata precedentemente e traccio la retta DH che incontra il prolungamento di BC in un punto G;
3. Traccio la circonferenza di centro H passante per A che incontra il prolungamento di BC in E.
4. Muovo H in modo che G coincida con E.
5. L'angolo $\angle(HEA)$ è $\frac{1}{3}$ dell'angolo $\angle(BAD)$



Trisezione

La trisezione dell'angolo e l'ennagono regolare inscritto



Costruzione Ennagono

La trisezione dell'angolo e l'ettagono regolare

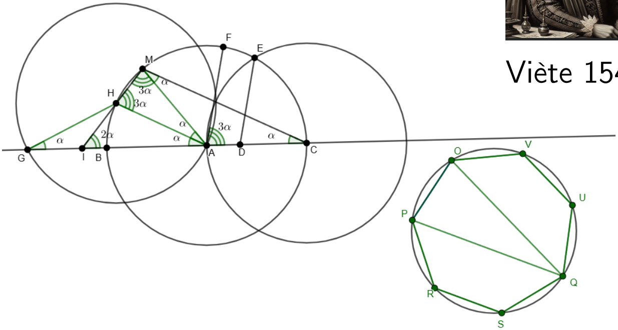
Per costruire l'ettagono regolare dobbiamo costruire un triangolo isoscele che ha gli angoli alla base tripli dell'angolo al vertice.

1. Circonferenza di centro A e passante per B (C_1), retta AB che individua il diametro AC.
2. Considero su AC il punto D tale che $AD = \frac{1}{3}AB$.
3. Circonferenza di centro C passante per A (C_2) che incontra (C_1) in E
4. Traccio DE e per A la parallela a DE che incontra (C_1) in F.
5. Prendo un punto H su (C_1) che incontra il prolungamento di AB dalla parte di B in G
6. Traccio la circonferenza di centro H passante per A (C_3) che incontra il prolungamento di BC in L.
7. Sposto H in maniera che G coincida con L.
8. Traccio per E la parallela ad FH che incontra il prolungamento di BC in I
9. Traccio l'asse di AI che incontra la circonferenza (C_1) in M
10. Il triangolo AHM ha gli angoli alla base tripli dell'angolo al vertice.

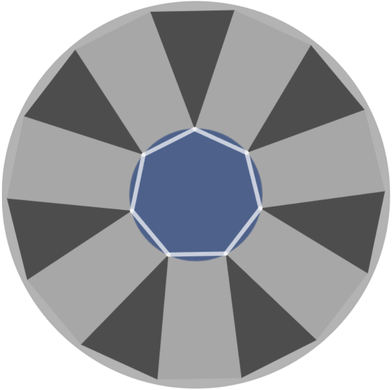
La costruzione dell'ettagono regolare

EttagonoRegolare

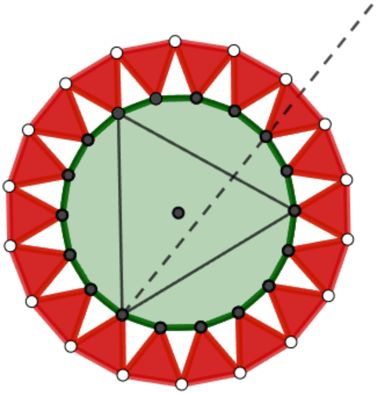
Viète 1540-1603



L'ettagono regolare nel cerchione dell'auto



Il pavimento e l'ennagono



L'equazione ciclotomica $z^9 - 1 = 0$

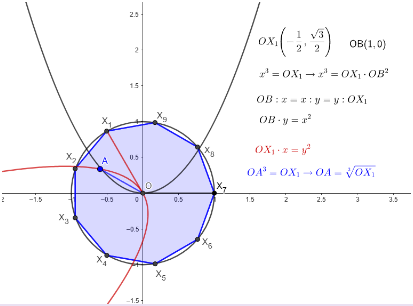
La costruzione dell'ennagono regolare corrisponde alla risoluzione dell'equazione $z^9 - 1 = 0$ che corrisponde a:

$$z^9 - 1 = (z^3 - 1)(z^6 + z^3 + 1) = 0 \tag{10}$$

$z^3 - 1 = 0$ sono i tre vertici del triangolo equilatero. e ponendo $x = z^3$ 10 diventa:

$$x^2 + x + 1 = 0 \tag{11}$$

Dette x_1 e x_2 le soluzioni avremo che $z_1 = \sqrt[3]{x_1}$ e $z_2 = \sqrt[3]{x_2}$



L'ettagono regolare: $z^7 = 1$

Si tratta di costruire le soluzioni dell'equazione

$$z^7 - 1 = 0 \rightarrow \frac{z^7 - 1}{z - 1} = z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0 \tag{12}$$

Riscriviamo 12 come

$$\left(z + \frac{1}{z}\right)^3 - 2\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + \left(z + \frac{1}{z}\right) - 1 = 0 \tag{13}$$

Applico la sostituzione $w = z + \frac{1}{z}$. L'equazione 13 diventa

$$w^3 + w^2 - 2w - 1 = 0 \tag{14}$$

Applico la sostituzione per eliminare il termine di grado 2

$$w = y - \frac{1}{3} \rightarrow y^3 - \frac{7}{3}y - \frac{7}{27} = 0 \tag{15}$$

A questo punto si esprime $y = u + v$ con u e v che soddisfano le seguenti equazioni: $u^3 + v^3 = \frac{7}{27}$ e $u^3 \cdot v^3 = \left(\frac{7}{9}\right)^3$ Quindi risolvendo l'equazione di secondo grado $x^2 - \frac{7}{27}x + \left(\frac{7}{9}\right)^3 = 0$ si possono ottenere u^3, v^3 e di conseguenza similmente a quanto fatto per l'ennagono $y = \sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v}$

Altri poligoni e altre equazioni ciclotomiche

$$z^{11} - 1 = 0 \rightarrow \frac{z^{11} - 1}{z - 1} = z^{10} + z^9 + z^8 + z^7 + z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$$

Dividiamo per z^5 e otteniamo con alcuni conti diventa:

$$\left(z + \frac{1}{z}\right)^5 + \left(z + \frac{1}{z}\right)^4 - 4\left(z + \frac{1}{z}\right)^3 - 3\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + 3\left(z + \frac{1}{z}\right) + 1 = 0 \quad (16)$$

da cui sostituendo $x = z + \frac{1}{z}$ si ottiene l'equazione di quinto grado:

$$x^5 + x^4 - 4^3 - 3x^2 + 3x + 1 = 0 \quad (17)$$

Che percorso proporre agli studenti?

1. Attività 1: un giro in città alla ricerca di poligono regolari;
2. Attività 2: poligoni regolari costruibili riga e compasso: le costruzioni degli Elementi di Euclide e attività di dimostrazione basata sull'osservazione della figura;
3. Attività 3: ricostruzione dei poligoni regolari fotografati e nuove creazioni;
4. Attività 4: poligoni regolari non costruibili riga e compasso e la trisezione dell'angolo;
5. si può riprendere il discorso quando si affrontano i numeri complessi e proporre la costruzione del pentagono mediante la risoluzione dell'equazione $z^5 = 1$.

Raccolta immagini

Riferimenti bibliografici (I)

Link
Trisezione Angolo
Vietae, Opera mathematica pag 242

[1] Francesco Bologna and Enrico Rogora. Matematica e insegnamento interdisciplinare. *Matematica, Cultura e Società (Bologna)*, 8(3), 2023.

[2] Aldo Brigaglia, Maria Anna Raspanti, and Enrico Rogora. L'uso di un software di geometria dinamica nella formazione dei futuri insegnanti. *Matematica, Cultura e Società (Bologna)*, 6(1), 2021.

[3] Federigo Enriques. Gli elementi d'euclide e la critica antica e moderna. *(No Title)*, 1925.

[4] Euclides, Attilio Frajese, and Lamberto Maccioni. *Gli elementi di Euclide*. Unione Tipografico-Editrice Torinese, 1970.

[5] Carl Friedrich Gauss. *Disquisitiones arithmeticae auctore d. Carolo Friderico Gauss*. in commissis apud Gerh. Fleischer, jun., 1801.