

SAPIENZA - UNIVERSITA' DI ROMA
MASTER DI II LIVELLO IN CALCOLO SCIENTIFICO
A.A. 2014/2015

ELIMINAZIONE DEL DISTURBO DI RETE SU SEGNALI ECG
ATTRAVERSO L'UTILIZZO DI FILTRI NUMERICI

Candidata

Claudia D'Agostini

Relatore

Prof. Camillo Cammarota

INDICE

Introduzione	3
Capitolo1 - Richiami di teoria dei segnali	4
1.1 - Segnali a tempo continuo	4
1.2 - Sistemi lineari e permanenti	5
1.3 - La trasformata di Fourier	6
1.4 - Segnali a tempo discreto	9
1.5 - Il campionamento	9
1.6 - La trasformata z	11
1.7 - La trasformata discreta di Fourier	13
Capitolo 2 - I filtri	15
2.2 - Progetto i filtri	16
2.3 - Progetto di filtri FIR	18
2.4 - Progetto di filtri IIR	21
Capitolo 3 - Eliminazione del disturbo di rete nel segnale ECG	23
3.1 - Introduzione	23
3.2 - Filtro di Notch	27
3.3 - Filtri passa - basso	30
3.4 - Decomposizione del segnale	35
3.5 - Densità spettrale di potenza	38
3.6 - Filtraggio del segnale nelle condizioni di massimo sforzo	45
Conclusioni	50
Bibliografia	51

INTRODUZIONE

L'esame ECG è uno strumento di fondamentale importanza per il monitoraggio dell'attività cardiaca. Il segnale ottenuto con questo esame può essere affetto da numerose tipologie di disturbo tra le quali riveste particolare importanza il disturbo di rete.

In questo lavoro si intende analizzare il miglioramento ottenuto sulla qualità del segnale applicando tre tipologie di filtri numerici.

Nel primo capitolo si introducono in maniera sintetica le principali nozioni della teoria dei segnali continui e discreti. In particolare si descrivono le principali caratteristiche dei segnali nel dominio del tempo e nel dominio della frequenza, illustrando gli strumenti matematici che permettono il passaggio dall'uno all'altro.

Nel secondo capitolo viene presentata una panoramica generale sui filtri numerici; se ne descrivono le caratteristiche e si illustrano input ed output del loro progetto; si approfondiscono due metodi di progetto che vengono utilizzati nelle applicazioni del capitolo successivo.

Nell'ultimo capitolo si analizzano i dati relativi agli ECG sotto sforzo relativi a diversi pazienti. Si considerano separatamente le fasi iniziale e quella di massimo sforzo; i segnali ad esse relativi vengono filtrati utilizzando le tre diverse tipologie di filtri. Si analizza la qualità del filtraggio confrontando il contenuto in frequenza dei segnali prima e dopo il passaggio attraverso i filtri e calcolando l'autocorrelazione del segnale residuo.

Le applicazioni numeriche ed i relativi grafici (cap 3) sono stati effettuati utilizzando Matlab. I dati sono stati forniti dall'ambulatorio di Cardiologia del Policlinico dell'Università di Roma La Sapienza. Gli esami ECG sono stati effettuati utilizzando un elettrocardiografo PC-ECG 1200 Norav Medical Ltd (frequenza di campionamento 500 Hz, risoluzione in ampiezza $2.441\mu\text{V}$, range dinamico (-5mV,5mV).

CAPITOLO 1

RICHIAMI DI TEORIA DEI SEGNALI - SEGNALI A TEMPO CONTINUO E A TEMPO DISCRETO

1.1 - SEGNALI A TEMPO CONTINUO

Un segnale può essere considerato come una funzione di una o più variabili che contiene informazioni su un particolare fenomeno fisico. Considerando il caso di segnali come funzioni di una sola variabile, quando questa è definita sull'asse reale o su un suo intervallo, il segnale si dice a tempo continuo. Quando la variabile indipendente è definita solo su alcuni punti dell'asse reale il segnale si dice a tempo discreto. In questo primo capitolo si descriveranno dapprima le caratteristiche dei segnali a tempo continuo, successivamente si passerà all'analisi dei segnali a tempo discreto. [1,2,9,10]

Alcune caratteristiche dei segnali sono particolarmente significative per la loro analisi ed elaborazione e si richiamano brevemente. I segnali possono essere pari o dispari, in caso contrario, ciascun segnale può essere suddiviso in una componente pari ed una componente dispari. I segnali si dicono periodici di periodo T se $x(t) = x(t+nT)$ con $n=0,1,\dots,\infty$.

Un segnale si dice segnale ad energia finita, o anche segnale di energia, se vale la seguente relazione

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |X(t)|^2 dt < \infty$$

Si definisce energia di un segnale la quantità

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(t)|^2 dt$$

Per un segnale periodico di periodo T si definisce potenza media del segnale

$$P = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} |X(t)|^2 dt$$

definizione che può essere estesa a segnali non periodici prendendo il limite

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} |X(t)|^2 dt$$

Un segnale ad energia finita ha potenza nulla. Un segnale ha potenza finita se

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} |X(t)|^2 dt < \infty$$

Un segnale con potenza finita è detto anche segnale di potenza.

Le definizioni riportate di energia e potenza di un segnale rivestono notevole importanza perché, come si dirà in seguito, la possibilità di applicare o meno alcuni strumenti fondamentali per il trattamento dei segnali come la trasformata di Fourier, sono condizionati dalle caratteristiche energetiche e di potenza del segnale stesso.

1.2 - SISTEMI LINEARI E PERMANENTI

Si definiscono sistemi dei "dispositivi" che ricevono un segnale in ingresso e restituiscono un segnale in uscita con caratteristiche, in generale, diverse da quelle del segnale in ingresso. Una classe particolare di sistemi è quella dei sistemi lineari e permanenti o tempo invarianti. I sistemi lineari sono quelli per i quali è applicabile il principio di sovrapposizione degli effetti. In particolare, se il segnale in ingresso ha la forma

$$x(t) = \sum_i a_i x_i(t)$$

il segnale in uscita è dato da

$$y(t) = \sum_i a_i y_i(t)$$

con $y_i(t)$ uscita relativa all'ingresso $x_i(t)$.

La permanenza è invece una caratteristica legata all'invarianza nel tempo delle caratteristiche del sistema. Se all'ingresso $x(t)$ corrisponde l'uscita $y(t)$, all'ingresso $x(t-\tau)$ corrisponde l'uscita $y(t-\tau)$. Una proprietà importante dei sistemi lineari permanenti, o anche invarianti alla traslazione, è che la risposta per un ingresso sinusoidale è ancora sinusoidale alla stessa frequenza dell'ingresso, con ampiezza e fase determinate dal sistema.

Altre due caratteristiche dei sistemi molto importanti, anche per gli argomenti trattati nel seguito, sono la causalità e la stabilità.

Un sistema è causale se rispetta il principio causa-effetto cioè se l'uscita ad un certo istante non dipende dai valori futuri dell'ingresso. Infine un sistema si dice stabile se ad un ingresso qualsiasi limitato in ampiezza, corrisponde un'uscita limitata in ampiezza.

Un sistema si caratterizza attraverso il legame che stabilisce tra il segnale in ingresso ed il segnale in uscita. Per descrivere questo legame e darne una sua descrizione analitica, si utilizzerà una particolare funzione $\delta(t)$ detta di Impulso di Dirac. L'impulso di Dirac presenta la caratteristica di essere nullo su tutto l'asse reale ad eccezione del punto 0 dove vale ∞ ed il suo integrale tra $-\infty$ e $+\infty$ ha valore unitario.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

Si chiama risposta impulsiva di un sistema lineare tempo invariante il segnale in uscita al sistema quando l'ingresso è costituito da un impulso di Dirac. La risposta impulsiva permette, dato un segnale in ingresso, di ottenere il segnale in uscita.

Un segnale può essere espresso come il prodotto di convoluzione tra il segnale stesso e l'impulso di Dirac, quindi come la somma di infiniti impulsi di Dirac, traslati l'uno rispetto all'altro, la cui ampiezza è data da $x(\tau)d\tau$

$$x(t) = x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t - \tau)d\tau$$

Dalle proprietà di linearità e tempo invarianza, a partire dalla relazione precedente, si può scrivere l'uscita dal generico sistema con risposta impulsiva $h(t)$ come data dall'integrale di convoluzione tra l'ingresso e la risposta impulsiva stessa

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t - \tau)dt$$

1.3 - LA TRASFORMATATA DI FOURIER

I segnali, in generale, presentano un andamento nel tempo piuttosto complesso. Esiste però uno strumento matematico che permette di trattare lo stesso segnale nel dominio della frequenza. Questo passaggio risulta, in generale, molto vantaggioso da un punto di vista computazionale, inoltre mette in luce caratteristiche importanti del segnale che sono invece poco evidenti nella rappresentazione nel dominio del tempo.

Una segnale, definito in $[-T/2, T/2]$ o periodico, può essere espresso come combinazione lineare di seni e coseni secondo lo sviluppo in serie di Fourier

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) \right)$$

Tale sviluppo è valido solo per i segnali che soddisfano le seguenti condizioni di Dirichlet:

- 1) L'integrale $\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|dt$ esiste ed è finito;
- 2) Il numero di discontinuità di prima specie delle funzioni nell'intervallo $[-T/2, T/2]$ deve essere finito.

Se sono soddisfatte le condizioni di Dirichlet nell'intervallo $[-T/2, T/2]$, lo sviluppo in serie di Fourier converge:

- a $x(t)$ nei punti di continuità;
- a $(x(t^+)+x(t^-))/2$ nei punti di discontinuità

all'esterno dell'intervallo lo sviluppo periodizza $x(t)$.

Osservando l'espressione di questo sviluppo in serie appare immediatamente evidente che l'informazione contenuta nel segnale $x(t)$ è stata spostata in una serie di numeri, i coefficienti della serie, perché l'andamento nel tempo dei seni e dei coseni che compaiono nella serie è noto.

I segnali sinusoidali e cosinusoidali che formano la base dello sviluppo in serie di Fourier sono tra loro ortogonali, proprietà che ci consente di calcolare agevolmente i coefficienti che assumono le espressioni:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) dt$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) dt$$

Per $k=0,1,\dots,\infty$

Si può pensare di estendere la regione di integrazione dei coefficienti da $-\infty$ a $+\infty$ e ottenere la Trasformata di Fourier, definita come:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

Le condizioni di esistenza sono le stesse condizioni di Dirichlet che garantiscono la possibilità di effettuare lo sviluppo in serie secondo Fourier. In particolare i segnali di energia, definiti nel primo paragrafo, sono trasformabili secondo Fourier, al contrario dei segnali di potenza.

E' possibile, tuttavia, utilizzare la trasformata di Fourier anche per quest'ultima categoria di segnali. Considerando la *funzione di autocorrelazione* associata al generico segnale, definita come:

$$R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) x(t + \tau) dt$$

per i segnali di energia e

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2} x(t) x(t + \tau) dt$$

per i segnali di potenza, è possibile trasformare secondo Fourier quest'ultima grandezza.

Applicando questi concetti ai sistemi lineari e permanenti si ottiene che la trasformata di Fourier della risposta all'impulso corrisponde alla risposta in frequenza del sistema. Nel dominio della frequenza la relazione tra ingresso e uscita di un sistema lineare è data dalla moltiplicazione della risposta in frequenza del segnale di ingresso per la risposta in frequenza del sistema, ed è questo risultato che evidenzia come ci sia un vantaggio computazionale nel passaggio dal dominio del tempo al dominio della frequenza: si passa da un'operazione di convoluzione ad un'operazione di moltiplicazione.

La trasformata di Fourier è, evidentemente, una quantità complessa e solitamente se ne danno le rappresentazioni in ampiezza e fase in funzione della frequenza.

A titolo di esempio, si può considerare il segnale $x(t) = e^{-\alpha t}u(t)$ con $\alpha > 0$.

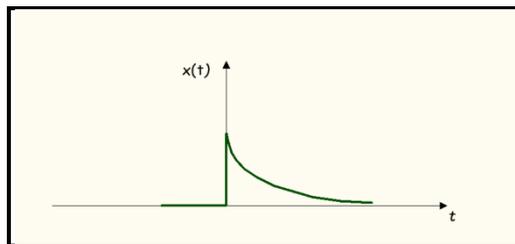


Figura 1.1

La trasformata di Fourier di questo segnale è $X(F) = \frac{1}{\alpha + 2j\pi F}$

Lo spettro di densità di ampiezza e fase sono dati rispettivamente da

$$|X(F)| = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + 2\pi F^2}}$$

$$\Phi(F) = -\arctan\left(\frac{2\pi F}{\alpha}\right)$$

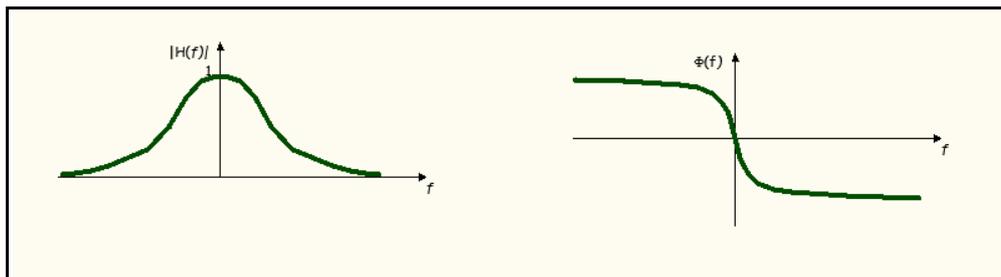


Figura 1.2

1.4 - SEGNALI TEMPO DISCRETI

Abbiamo fin'ora trattato di segnali cosiddetti *a tempo continuo* rappresentabili come una funzione di variabile continua. Nella pratica si ha a che fare solitamente con segnali *a tempo discreto* ossia con segnali per i quali la variabile indipendente assume valori discreti ed il segnale diventa una sequenza di numeri. Un segnale tempo discreto può nascere come tale se rappresentazione di un processo fisico discreto, ma può anche essere il risultato di una discretizzazione di un segnale a tempo continuo, operazione che permette di trattare il segnale mediante le tecniche numeriche oggi utilizzate. Anche il valore del segnale assume solitamente una forma discreta; si parla in questo caso di *risoluzione* del segnale e rappresenta il numero di intervalli nei quali viene suddiviso l'intervallo contenente i valori del segnale e si esprime in bit. L'operazione che consente il passaggio da un segnale a tempo continuo ad un segnale a tempo discreto è detta *campionamento* mentre la discretizzazione dei valori assunti dalla variabile è detta *quantizzazione*.

1.5 - CAMPIONAMENTO

L'operazione di campionamento consiste nel passare da una funzione continua ad una sequenza di numeri che rappresentano le misure del segnale in posizioni assegnate.

Un segnale continuo viene campionato idealmente, se moltiplicato per un treno di impulsi di Dirac di area unitaria, distanziati di un intervallo T_c (intervallo di campionamento). Nel dominio del tempo, il risultato è quello illustrato in figura:

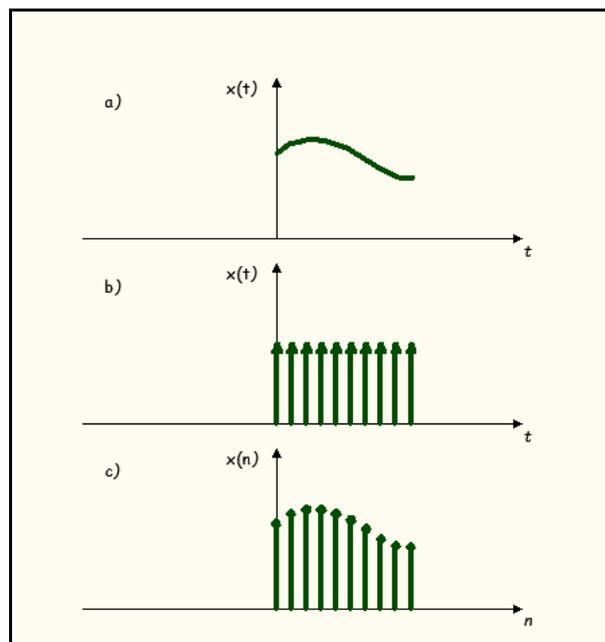


Figura 1.3 - a) segnale continuo, b) treno di impulsi di Dirac, c) Segnale campionato

Ci si chiede se sia possibile, a partire dal segnale campionato, ricostruire il segnale continuo originale. In generale non è possibile, a meno che non siano soddisfatte determinate condizioni. Quando ciò non accade l'operazione di campionamento comporta una perdita di informazione.

E' interessante approfondire ciò che accade nel dominio della frequenza quando si effettua un'operazione di campionamento come sopra descritto. Ipotizziamo che il segnale continuo abbia un andamento in frequenza circoscritto ad una banda (intervallo di frequenza) ben definita. Se lo stesso segnale subisce l'operazione di campionamento, nel dominio della frequenza, lo spettro del segnale campionato è la ripetizione ad intervalli f_c (frequenza di campionamento $f_c=1/T_c$ con T_c intervallo di campionamento) dello spettro del segnale originale. Chiaramente, se l'intervallo f_c non è sufficientemente esteso, gli spettri che si ripetono periodicamente andranno a sovrapporsi e questo fenomeno va sotto il nome di *aliasing*.

Il teorema di Shannon - Nyquist definisce un valore minimo della frequenza di campionamento che evita questo fenomeno e garantisce la possibilità di ricostruire il segnale continuo a partire dal segnale campionato.

Teorema di Shannon - Data una funzione con trasformata di Fourier nulla al di fuori dell'intervallo di frequenze, la minima frequenza di campionamento per evitare il fenomeno dell'aliasing e perdita di informazione nella ricostruzione del segnale continuo originario è pari al doppio della sua frequenza massima.

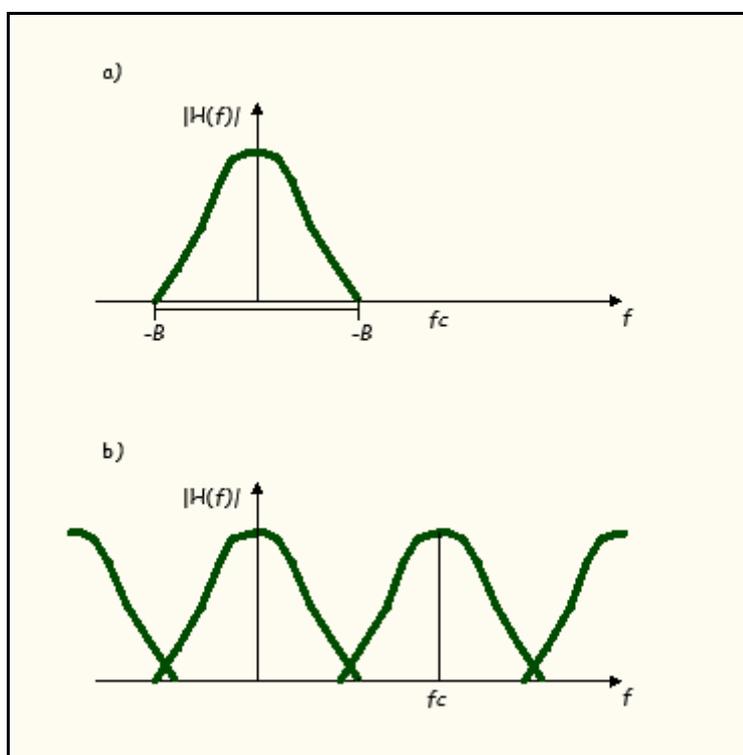


Figura 1.4 - a) spettro di ampiezza del segnale continuo, b) spettro di ampiezza del segnale campionato

Dopo aver effettuato il campionamento si deve proseguire con l'operazione di quantizzazione.

Abbiamo i valori del segnale calcolati nelle variabili indipendenti discrete ottenuti nell'operazione campionamento che possiamo indicare con $x_c(n)$. Si definisce un passo di quantizzazione e ad ogni intervallo definito dal passo di quantizzazione, viene associato un valore del segnale che rappresenta un arrotondamento del valore originario; ogni valore $x_c(n)$ viene arrotondato con il corrispondente valore $x(n)$. Questa operazione evidentemente genera un errore detto appunto *errore di quantizzazione*.

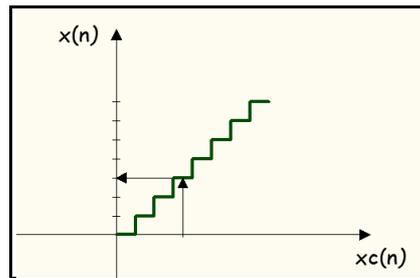


Figura 1.5

1.6 - TRASFORMATA Z

Nei paragrafi precedenti si sono descritte le procedure per effettuare la digitalizzazione dei segnali continui. L'elaborazione e la trattazione dei segnali numerici (o digitali) è agevolata da opportuni strumenti matematici tra i quali riveste una particolare importanza la trasformata z.

La trasformata z è una generalizzazione della trasformata di Fourier per segnali tempo discreti come la trasformata di Laplace è una generalizzazione della trasformata di Fourier per segnali tempo continui.

Si definisce trasformata z di un segnale discreto, di una sequenza, x_n la quantità

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n}$$

con z variabile complessa. Se $X(z)$ esiste, la trasformata di Fourier della sequenza $x(n)$ si ottiene dalla trasformata z, ponendo $z = e^{j2\pi fT}$, ossia, la trasformata di Fourier è la trasformata z calcolata lungo la circonferenza unitaria del piano complesso.

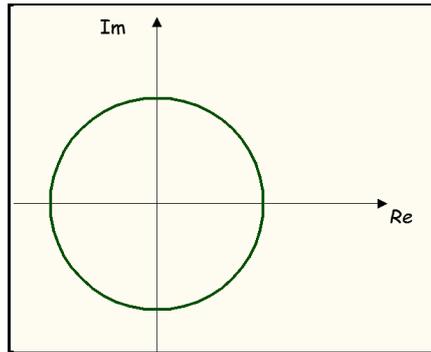


Figura 1.6 - Piano complesso e circonferenza unitaria

Esistenza (convergenza) della trasformata z .

La trasformata $X(z)$ esiste per un certo valore di z se $|X(z)| < \infty$. Una condizione sufficiente è

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |X(n)z^{-n}| < \infty$$

Si definisce regione di convergenza l'insieme dei valori di z sul piano complesso per i quali la trasformata z converge. La regione di convergenza di una trasformata z riveste particolare importanza perché per individuare in maniera univoca una sequenza a partire dalla sua trasformata z occorre definire anche la sua regione di convergenza; è possibile che diverse sequenze abbiano la stessa trasformata z . La circonferenza di raggio unitario nel piano complesso può essere compresa o esclusa dalla regione di convergenza; in questa esposizione verranno trattate esclusivamente trasformate z con regione di convergenza comprendente il cerchio di raggio unitario.

Una classe importante di trasformate z è quella per la quale $X(z)$ è un rapporto di polinomi in z^{-1} . Le radici del polinomio a numeratore sono chiamate zeri, infatti sono quei valori che annullano la trasformata, mentre le radici del polinomio a denominatore sono chiamate poli, e per quei valori la trasformata è pari ad ∞ .

Passando alla descrizione dei sistemi lineari tempo invarianti, si possono fare considerazioni analoghe a quelle fatte nei paragrafi precedenti a proposito della trasformata di Fourier. Se si considera un segnale discreto in ingresso $x(n)$, un sistema lineare tempo invariante con risposta all'impulso $h(n)$ e la relativa uscita $y(n)$, e le relative trasformate z , $X(z)$, $H(z)$ ed $Y(z)$ valgono le seguenti relazioni, nel dominio del tempo e della frequenza:

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

$$Y(z) = X(z)H(z)$$

Come per la trasformata di Fourier, all'operazione di convoluzione nel dominio del tempo corrisponde una moltiplicazione nel dominio della frequenza. La trasformata z della risposta all'impulso $H(z)$ è detta anche *funzione di trasferimento* del sistema. La funzione di trasferimento calcolata nel cerchio unitario del piano complesso è la risposta in frequenza del sistema.

1.7 - TRASFORMATA DISCRETA DI FOURIER (DFT)

Fin'ora si è parlato di segnali discreti senza specificarne la lunghezza ed ammettendo, in generale, una lunghezza infinita. È possibile definire un altro strumento matematico specifico per sequenze finite o periodiche di lunghezza (o periodo N) denominato Trasformata Discreta di Fourier (DFT):

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi nk/N}$$

con $k=0,1,\dots,N-1$

Si dimostra che è possibile riottenere i valori iniziali della sequenza, noti gli n valori della trasformata discreta $X(k)$ attraverso la seguente espressione nota come trasformata discreta di Fourier inversa (IDFT):

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j2\pi nk/N}$$

Da una sequenza periodica di periodo N nel dominio della variabile discreta n otteniamo un'altra sequenza, in generale complessa, anch'essa periodica dello stesso periodo N nel dominio della variabile discreta k . Le tre trasformate definite fino ad ora, vengono molto spesso indicate con lo stesso simbolo, X (di solito la lettera maiuscola della sequenza) e la loro distinzione è basata sulla differenza del tipo di argomenti: variabile reale per la trasformata di Fourier, variabile intera per la trasformata discreta, variabile complessa per la trasformata z .

Vediamo ora che relazioni esistono tra le tre trasformate descritte.

- 1) Per sequenze periodiche la trasformata di Fourier e la trasformata Z non esistono.
- 2) Per sequenze finite, esistono le tre trasformate ed ha dunque senso parlare della relazione che intercorre tra le stesse.

Trasformata di Fourier di una sequenza finite di durata N	Trasformata z di una sequenza finite di durata N	Trasformata di Fourier discreta di una sequenza finita di durata N
$X(F) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi Fn}$	$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) z^{-n}$	$X(k) = \sum_{k=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi kn/N}$

La trasformata discreta di Fourier coincide con la trasformata di Fourier se si sostituisce F, frequenza normalizzata, con k/N; per una sequenza finita di durata N, il k-esimo valore della DFT il valore della trasformata di Fourier calcolata per il valore $F=k/N$, ossia, la DFT non è altro che la trasformata di Fourier calcolata su N valori di frequenza equispaziati. Considerando invece l'espressione della trasformata z, è evidente che se a z si sostituisce $z = e^{j2\pi(k/N)T}$ si può concludere che la trasformata discreta di Fourier coincide con la trasformata z calcolata su N punti equispaziati sulla circonferenza unitaria del piano complesso di un angolo pari a $2\pi/N$.

Nota la trasformata di Fourier o la trasformata z è possibile ottenere la trasformata discreta di Fourier. Ci si chiede se è possibile ottenere le due trasformata a partire dalla trasformata discreta e la risposta è positiva per sequenze finite. E' un risultato notevole perché permette di utilizzare la trasformata discreta, che è una sequenza di numeri, per trattare le sequenze finite. In pratica, nel dominio della frequenza, si ottiene una descrizione del segnale adatta ad essere trattata da sistemi numerici.

CAPITOLO 2 - FILTRI

I filtri sono sistemi che permettono, a partire da un segnale in ingresso $x(t)$ con determinate caratteristiche, di estrarre un segnale in uscita $y(t)$ con caratteristiche differenti. L'utilizzo di questi sistemi può avere, ad esempio, l'obiettivo di modificare le caratteristiche in frequenza del segnale in ingresso. Una classificazione di filtri progettati a tale scopo è la seguente:

- *filtri passa basso;*
- *filtri passa alto;*
- *filtri passa banda;*
- *filtri elimina banda.*

Come già visto nel capitolo precedente, nel dominio della frequenza, la relazione che lega l'uscita all'ingresso è una moltiplicazione della trasformata zeta del segnale in ingresso per la funzione di trasferimento del sistema che ne descrive in qualche modo il comportamento in frequenza.

E' possibile individuare le caratteristiche delle quattro categorie di filtri elencate utilizzando una schematizzazione ideale del loro comportamento in frequenza, schematizzazione che diventa l'obiettivo al quale bisogna tendere per realizzare filtri reali con le stesse finalità.

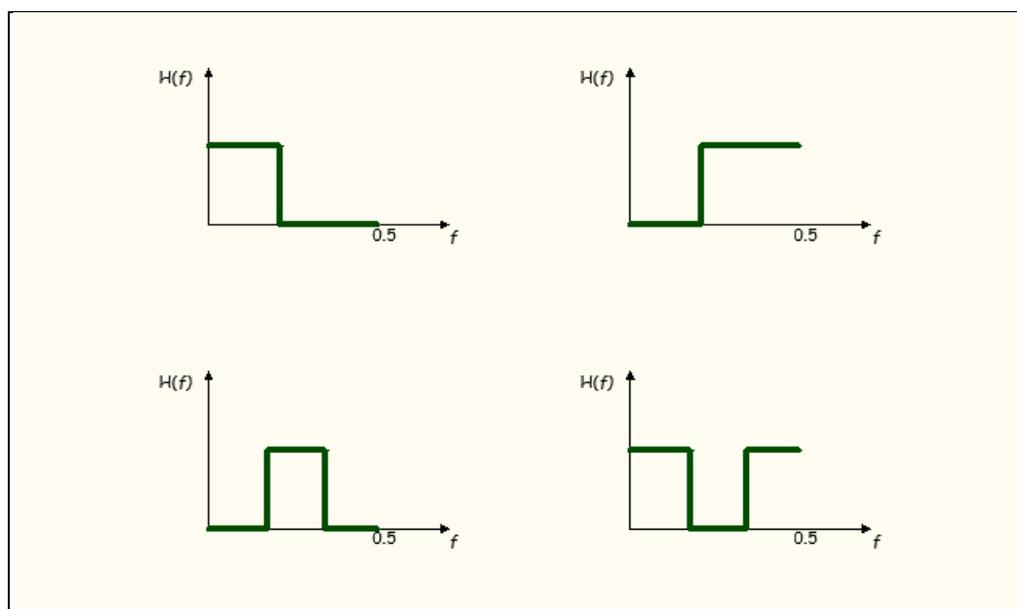


Figura 2.1 - Filtro passa basso- Filtro passa alto - Filtro passa banda - Filtro elimina banda

Da un punto di vista analitico un filtro può essere caratterizzato dalla trasformata z , che è appunto la sua *funzione di trasferimento*, ma anche da un'equazione alle differenze. Si suddividono i filtri in due grandi categorie:

FIR - Filtri a risposta impulsiva finita

IIR - Filtri a risposta impulsiva infinita

I primi hanno trasformata z dotata di soli zeri ossia funzione di trasferimento costituita da un polinomio in z^{-1} , ed equazione alle differenze nella forma seguente:

$$H(z) = \sum_{h=1}^M a_h z^{-k} \qquad y(n) = \sum_{h=1}^M a_h x(n-h)$$

I secondi hanno funzione di trasferimento razionale in z^{-1} e quindi dotata di zeri e poli.

$$H(z) = \frac{\sum_{h=1}^M b_h z^{-k}}{\sum_{h=1}^M a_h z^{-k}} \qquad y(t) = \sum_{h=1}^M a_h x(n-h) + \sum_{k=1}^N b_k y(n-h)$$

I primi presentano il vantaggio di essere sempre stabili e di avere fase lineare ma necessitano di lunghezze maggiori per ottenere livelli di selettività analoghi. Al contrario, i filtri a risposta impulsiva infinita hanno, in generale, sequenze più corte ma hanno una risposta in fase non lineare e necessitano di un controllo sulla stabilità, che non è garantita a priori.

2.2 - PROGETTO DI FILTRI

Il problema che si deve risolvere nella progettazione si pone in questi termini: assegnata una certa risposta in frequenza che il filtro deve avere (es. le risposte in frequenza ideali in figura 2.1), si devono determinare i coefficienti a_k o (a_k e b_k) tali da ottenere una funzione di trasferimento che approssimi l'andamento voluto. Prendendo atto del fatto che non è possibile ottenere esattamente la risposta ideale bisogna anche stabilire quali siano le tolleranze che si possono accettare.

I parametri da specificare per una corretta progettazione sono dunque:

- *banda passante*
- *banda oscura*
- *tolleranza in banda passante*
- *tolleranza in banda oscura*

La lunghezza del filtro, almeno in linea teorica, dovrebbe essere una quantità compresa tra gli output dell'iter progettuale. Numerosi metodi di progetto, tra i quali quelli utilizzati in questo lavoro, sono impostati inserendo la lunghezza del filtro N come input. In questo caso, il progetto si risolve, se possibile, utilizzando più valori di N trovando il valore minore che permette di rispettare tutte le altre condizioni.

Per ottenere un buon progetto di un filtro bisogna ottenere una funzione di trasferimento che sia il più possibile vicina alle specifiche progettuali e che, in ogni caso, rientri nelle tolleranze ammesse. Le specifiche progettuali, in generale, consistono nell'individuare le frequenze di taglio, i valori che la funzione di trasferimento deve avere negli intervalli di frequenza individuati e le tolleranze sugli scostamenti da questi valori. Nella figura 2.2 sono illustrate le specifiche di progetto di un filtro passa basso. Affinché il progetto possa considerarsi valido, la risposta in frequenza del filtro deve essere contenuta all'interno dell'area individuata dalle specifiche di progetto.

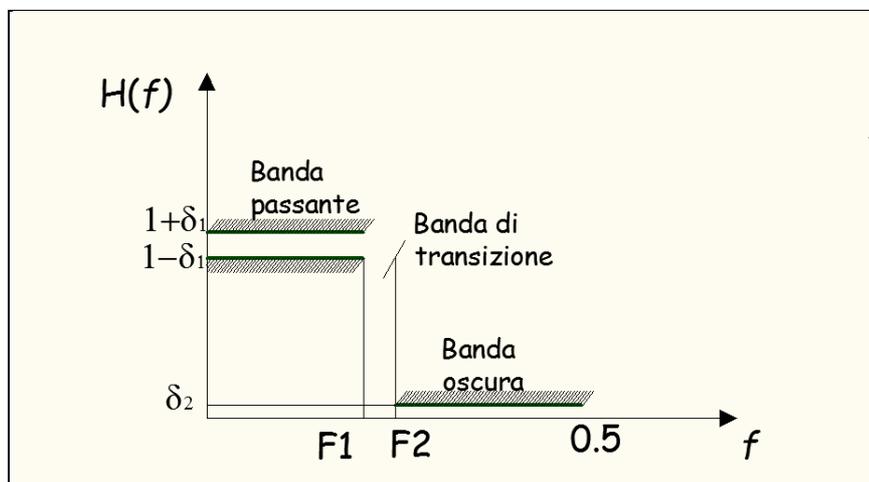


Figura 2.2 - Specifiche di progetto

2.3 - FILTRI FIR

Ci sono diversi metodi di progetto tra i quali:

- metodo delle finestre;
- metodo del campionamento in frequenza;
- metodo MINIMAX.

Si descrive il metodo MINIMAX alla base dell'algoritmo utilizzato per la progettazione di uno dei tre filtri utilizzati nelle applicazioni di questo lavoro. L'algoritmo è implementato in una funzione disponibile in **Matlab**, e segue la procedura indicata da Parks-McClellan.

PROGETTO DI FILTRI FIR - METODO DI CHEBYCHEV (EQUIRIPPLE, MINMAX) [7,9]

La caratteristica di questo metodo che lo rende particolarmente efficiente è l'ottenimento di deviazioni in banda passante e banda attenuata costanti. Il procedimento di ottimizzazione minimizza l'errore massimo tra la risposta in frequenza desiderata e quella raggiungibile dal filtro.

Si indica con $h(n)$ la sequenza rappresentativa del filtro lunga $2N+1$ e con $H(z)$ la sua funzione di trasferimento. Si considera un insieme nel dominio delle frequenze dato dalle bande passanti e le bande oscure, trascurando la zona di transizione, che viene indicato con \mathcal{F} . Si definisce l'errore da minimizzare come la differenza tra la trasformata desiderata $D(F)$ ed $H(F)$ moltiplicata per un peso $W(F)$.

L'obiettivo è quello di progettare un filtro che minimizzi una norma dell'errore:

$$W(F)|D(F) - H(F)| < \delta$$

In particolare, in questo algoritmo si richiede la minimizzazione della norma infinito e quindi del massimo valore dell'errore:

$$\max_{F \in \mathcal{F}} W(F)|D(F) - H(F)|$$

con $H(F) = \sum_{k=0}^n b_k \cos 2k\pi F$.

L'algoritmo utilizzato, che rientra nei metodi *equiripple*, è quello proposto da Parks - McClellan che è basato sul *teorema dell'alternanza* che fornisce una condizione necessaria e sufficiente per la minimizzazione della norma infinito dell'errore E .

Teorema dell'alternanza:

sia \mathcal{F} un sottoinsieme chiuso di $[0,1/2]$. Condizione necessaria e sufficiente affinché $H(F) = \sum_{k=0}^n b_k \cos 2k\pi F$ sia l'unica migliore approssimazione di $D(F)$ nel sottoinsieme \mathcal{F} è che la funzione errore $E(F) = W(F)[D(F) - H(F)]$ abbia su \mathcal{F} almeno $n+2$ alternanze; deve quindi valere la relazione

$$E(F_i) = -E(F_{i-1}) = \pm ||E||$$

con $F_0 < F_1 < \dots < F_{n+1}$ con $F_i \in \mathcal{F}$ e con $||E|| = \max |E(F)|$.

L'algoritmo di Parks - McClellan impone il numero di alternanze. Invece di minimizzare l'errore si va a risolvere un sistema di equazioni che soddisfano l'alternanza.

Ovviamente non sono note in partenza le frequenze per le quali la differenza è massima. Il primo passo consiste nel determinare una prima serie di $N+2$ frequenze e si impone che in corrispondenza delle frequenze stesse la differenza tra funzione approssimante e funzione approssimata sia pari a δ (valore incognito). Questo equivale a scrivere $N+2$ equazioni nella forma

$$W(F_k)(D(F_k) - H(F_k)) = -(-1)^k \delta$$

Il sistema di $N+2$ equazioni, scritto in forma estesa è il seguente:

$$b_0 + b_1 \cos 2\pi F_0 + \dots + \frac{\delta}{W(F_0)} = D(F_0)$$

$$b_0 + b_1 \cos 2\pi F_1 + \dots + (-1) \frac{\delta}{W(F_1)} = D(F_1)$$

...

$$b_0 + b_1 \cos 2\pi F_{n+1} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{\delta}{W(F_{n+1})} = D(F_{n+1})$$

In forma matriciale si mettono in evidenza le incognite delle equazioni stesse in numero pari a $N+2$ che sono date da: b_n ($N+1$ incognite) e δ

$$\begin{bmatrix} 1 & \cos 2\pi F_0 & \dots & 1/W(F_0) \\ 1 & \cos 2\pi F_1 & \dots & (-1)/W(F_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cos 2\pi F_{n+1} & \dots & (-1)^{n+1}/W(F_{n+1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D(F_0) \\ D(F_1) \\ \vdots \\ D(F_{n+1}) \end{bmatrix}$$

Si determina il valore di δ :

$$\delta = \frac{a_0 D(F_0) + \dots + a_{n+1} D(F_{n+1})}{\frac{a_0}{W(F_0)} + \dots + \frac{(-1)^{n+1} a_{n+1}}{W(F_{n+1})}}$$

con

$$a_k = (-1)^k \prod_{i=0, i \neq k}^{n+1} \frac{1}{(x_i - x_k)}$$
$$x_i = \cos 2\pi F_i$$

A questo punto si calcola la funzione che rappresenta l'errore utilizzando l'interpolazione di *Lagrange* sui valori delle frequenze estremali. Se la funzione di errore è minore di δ su tutto l'insieme \mathcal{F} il progetto si considera concluso. In caso contrario è necessario scegliere una nuova serie di frequenze e ripetere il procedimento.

La nuova serie di frequenze può essere scelta in questo modo: si calcola la funzione errore, interpolata con *Lagrange*, in una griglia di punti più fitta di quella individuata dalle frequenze estremali e si sceglie la nuova serie di frequenze individuando i punti, tra quelli della griglia, in cui la funzione errore cambia di segno.

Si ripete quindi il procedimento con la nuova serie di frequenze ed il calcolo si interrompe quando la differenza tra le frequenze dell'iterazione corrente e le frequenze dell'iterazione precedente è minore di un valore prefissato.

Se non si riesce a raggiungere una soluzione è necessario ricominciare il procedimento aumentando la lunghezza del filtro N .

Ricapitolando, in maniera schematica l'algoritmo Parks - McClellan prevede i seguenti passaggi:

1. Scelta iniziale delle frequenze estremali;
2. Determinazione dell'errore massimo
3. Calcolo della funzione errore con interpolazione di *Lagrange*
4. Verifica che la funzione errore si minore dell'errore massimo trovato in 2.
5. Se il punto 4. non è verificato si sceglie una nuova serie di frequenze nei punti nei quali la funzione errore cambia di segno.
6. Si ripete il calcolo.
7. L'iter si arresta se la nuova serie di frequenze estremali è uguale a quella precedente. In tal caso si ricomincia con un valore di N maggiore.

In questo metodo di progetto, come in molti altri, il numero N che definisce la lunghezza del filtro viene posto come input invece che come output. Esiste una formula empirica che fornisce un valore di N dal quale è ragionevole partire per ottenere il risultato in tempi contenuti. Il valore di N , ovviamente, è espresso in funzione delle specifiche di progetto. Per un filtro passa basso la formula è la seguente:

$$N \cong \frac{2}{3} \frac{1}{F_2 - F_1} \text{Log}_{10} \frac{1}{10\delta_1\delta_2}$$

2.4 - FILTRI IIR

Per ottenere una certa selettività con filtri FIR è necessario utilizzare sequenze lunghe; in alternativa si possono utilizzare filtri ricorsivi, dotati quindi di zeri e di poli, ed ottenere un pari livello di selettività con sequenze molto più brevi. Nel caso di filtri causali, per garantire la stabilità, è necessario che i poli siano tutti posizionati all'interno del cerchio unitario. Il progetto di questi filtri può avvenire trasformando un filtro analogico in un filtro numerico e questa tecnica risulta piuttosto comoda data la grande quantità di tipologie di filtri analogici disponibile.

In alternativa si può progettare direttamente un filtro numerico.

PROGETTO FILTRI IIR - METODO DIRETTO [2,6,9]

Si tratta anche in questo caso di un problema di ottimo. Si parte dalla risposta in frequenza desiderata, che viene definita nell'input, e si confronta con la risposta ottenuta. In questo caso il criterio di ottimo maggiormente utilizzato è quello dei minimi quadrati; indicando con $D(F)$ la risposta in frequenza desiderata, si definisce infatti la quantità da minimizzare in questo modo (errore quadratico medio):

$$E = \sum_{i=1}^L (|H(F_i)| - |D(F_i)|)^2$$

Il filtro da progettare è un filtro IIR, con una funzione di trasferimento di questo tipo:

$$H(z) = \frac{\sum_{h=1}^M b_h z^{-k}}{\sum_{h=1}^M a_h z^{-k}}$$

Le incognite di un problema di minimo così impostato sono i coefficienti a_k e b_k , che, ponendo per esempio $N=M$ sono in numero pari a $2N+1$. Si risolve il sistema di $2N+1$ equazioni in $2N+1$ incognite dove le equazioni sono le $2N+1$ derivate della funzione E rispetto alle variabili a_k e b_k .

$$\frac{dE}{da_k} = 0$$

$$\frac{dE}{db_k} = 0$$

Il progetto del filtro IIR viene effettuato utilizzando la funzione **Yulewalk** disponibile in Matlab. In questa funzione si effettua il progetto di un filtro IIR utilizzando le equazioni di Yule Walker. Queste equazioni si riferiscono ad un modello autogressivo AR e mettono in relazione la funzione di autocorrelazione con i coefficienti del modello. Sia dato un modello auto regressivo di ordine p

$$x_t = \sum_{i=1}^p a_i x_{t-i} + w_t$$

con w_t rumore bianco. Moltiplicando entrambi i membri per x_{t-1} e calcolandone il valore atteso si ottengono le seguenti equazioni, dette, appunto, equazioni di Yule Walker

$$r_m = \sum_{i=1}^p a_i r_{m-p} + \sigma_m^2 \delta_m$$

Si parte dalla determinazione di un filtro tutti poli con funzione di trasferimento $1/A(z)$ che vuole approssimare la funzione di trasferimento desiderata $H(z)$. Dalla funzione $H(z)$, e più precisamente dalla funzione $H(z)|_{z=e^{-j2\pi F}}$, si può ricavare la funzione di autocorrelazione della risposta all'impulso del filtro, che è proprio pari all'antitrasformata di $|H(z)|^2$. Si ricava, quindi la sequenza r_m e si utilizzano i primi N valori per progettare il filtro.

Se si indica con x_n la sequenza in uscita da un filtro IIR di ordine N con funzione di trasferimento $1/A(z)$ quando in ingresso c'è una sequenza di rumore bianco. La sequenza in uscita si ottiene con l'equazione alle differenze:

$$x_n = \sum_{i=1}^N a_i x_{n-i} + w_n$$

dove i valori a_i sono proprio i coefficienti della funzione di trasferimento. Dall'equazione alle differenze si passa alle equazioni di Yule Walker, come detto in precedenza. Utilizzando i primi N valori della sequenza della funzione di autocorrelazione e, attraverso le equazioni di Yule Walker, si ottengono i coefficienti a_i che sono proprio i coefficienti del polinomio a denominatore del filtro.

CAPITOLO 3 - ELIMINAZIONE DEL DISTURBO DI RETE NEL TRACCIATO ECG

3.1 INTRODUZIONE

[4]

Per monitorare l'attività elettrica del cuore si utilizza uno strumento poco invasivo che misura l'andamento della differenza di potenziale nel tempo tra punti diversi del corpo umano posizionando coppie di elettrodi su alcune zone del corpo del paziente. Solitamente si effettuano dodici misure e le registrazioni di differenza di potenziale tra le dodici coppie di elettrodi ottenute vanno sotto il nome di ECG. Le dodici derivazioni presentano differenze dovute a diversi fattori di disturbo che alterano, in maniera più o meno consistente, l'andamento del segnale. In tutte le misure si riescono comunque ad individuare le onde P,Q,R,S,T rappresentative dell'attività elettrica del cuore.

Il ciclo cardiaco ha inizio con la depolarizzazione degli atri (onda P) con conseguente contrazione atriale, a questa segue la depolarizzazione dei ventricoli (onda R) e loro successiva contrazione. Seguono la ripolarizzazione dei ventricoli (onda T) e ripolarizzazione degli atri che però, non è visibile sul tracciato ECG.

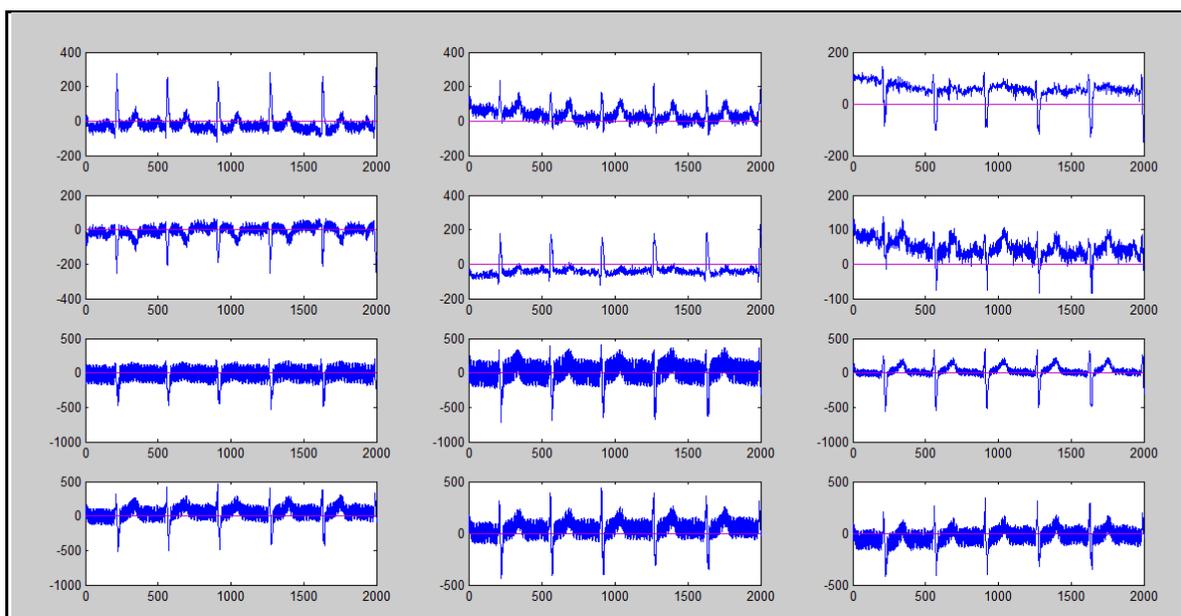


Figura 3.1 - Tracciati ECG relativi alle 12 derivazioni

Già l'analisi visiva del tracciato permette di acquisire importanti informazioni sullo stato di salute del paziente. Un'analisi più dettagliata sul segnale, effettuata con l'ausilio di strumenti matematici può consentire di acquisire ulteriori informazioni che risulterebbero difficilmente evidenti ad occhio nudo. Un esempio dell'utilizzo del tracciato ECG è sicuramente individuazione degli intervalli tra i picchi R-R che vengono raccolti a formare un nuovo segnale la cui rappresentazione grafica è detta tacogramma e che da anni è oggetto di studio. Lo studio della heart rate variability (HRV) effettuato appunto sugli intervalli R-R consente di analizzare approfonditamente il rapporto tra il sistema nervoso autonomo e l'attività cardiaca.

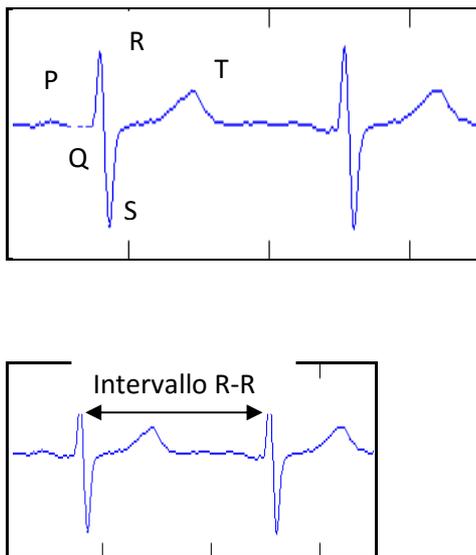


Figura 3.2 - Onde PQRST in un ciclo dell'attività cardiaca - Intervallo R-R

La presenza di elementi di disturbo sul tracciato ECG rende più complicata la sua analisi. Anche la determinazione dei picchi R per l'ottenimento del tacogramma, che viene effettuata con algoritmi appositi, può essere inficiata o, comunque, resa più difficoltosa se il tracciato originale è affetto da disturbi rilevanti.

Tra tutti, sicuramente riveste una notevole importanza il disturbo di rete (50 Hz). Nella figura 3.3 è messo a confronto il grafico di un segnale affetto da disturbo di rete e dello stesso segnale ripulito da tale disturbo. Risulta evidente come l'interferenza di rete disturbi la corretta detezione del segnale e come lo stesso segnale risulti molto più leggibile dopo una corretta operazione di filtraggio.

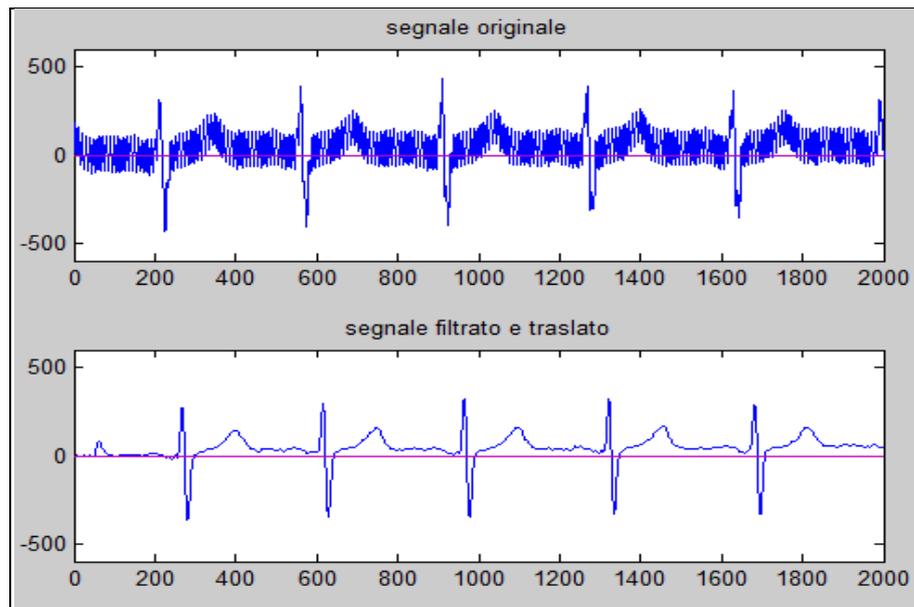


Figura 3.3 - Tracciato ECG originale e filtrato

Per ripulire il segnale si utilizzano filtri di vario tipo. In questo lavoro si metteranno a confronto tre tipologie di filtri, per illustrare il problema da un punto di vista generale. Ovviamente, sono state formulate diverse possibili soluzioni del sistema più sofisticate e più rispondenti alle esigenze del caso che non verranno trattate in questo lavoro.

Il punto di partenza per effettuare uno studio più approfondito sui filtri da utilizzare per questo scopo è, evidentemente, l'analisi in frequenza del segnale campionato di partenza. Il tracciato ECG presenta componenti in frequenza di ampiezza significativa per valori di frequenza relativamente bassi. Si nota come, nel segnale disturbato nasca un picco in corrispondenza dei 50 Hz. Nella figura 3.4 è rappresentato il grafico della densità spettrale di potenza relativo ad un segnale ECG affetto da disturbo dovuto all'interferenza di rete. La frequenza di 50 Hz, che nella figura corrisponde al valore 0.1 perché sull'asse delle ascisse sono indicate le frequenze normalizzate f/F_c , presenta un picco notevole ma concentrato, proprio per le caratteristiche di regolarità della corrente di rete. Richiamando le quattro tipologie di filtri descritte nel capitolo precedente (*passa-basso, passa-alto, passa-banda ed elimina banda*), in una situazione del genere, la scelta iniziale è quella di utilizzare un filtro elimina banda con banda stretta in modo da attenuare il rumore ma intaccare nel minor modo possibile le altre informazioni contenute dal segnale.

Considerando però che il contenuto in frequenza del tracciato ECG è rilevante per frequenze inferiori a 50 Hz, è ragionevole pensare di utilizzare anche un filtro passa basso con opportuna frequenza di taglio, inferiore a 50 Hz ma che non raggiunga le frequenze con ampiezza maggiore. Nelle pagine che seguono si applicano tre tipologie di filtri, un elimina banda IIR (filtro di notch) e due passa basso, rispettivamente FIR e IIR e si confrontano i risultati ottenuti. Le stesse analisi vengono effettuate su registrazioni relative a diversi pazienti per valutare la generalità dei risultati ottenuti

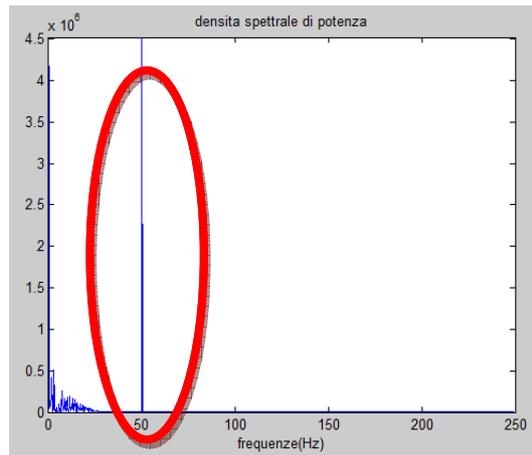


Figura 3.4

Un primo esempio di filtro sfrutta il fatto che le misure del rumore in punti distanziati tra loro di un intervallo pari $T_d/2$, dove T_d è il periodo dell'interferenza da eliminare, siano opposte e che si possano annullare con una semplice somma. La procedura numerica che realizza questo tipo di filtro ridefinisce due segnali ottenuti da quello di partenza, uno traslato rispetto all'altro, proprio di un intervallo pari a $T/2$. I valori dei due segnali vengono mediati: dall'operazione di media $(x_1(t_i) + x_2(t_i))/2$ il rumore viene completamente cancellato perché se ne sommano due valori opposti. Il segnale viene in parte modificato ma riesce a mantenere le informazioni necessarie per le relative analisi cliniche.

L'utilizzo di un filtro di questo tipo necessita di una frequenza di campionamento del segnale multipla della frequenza propria dell'interferenza; in caso contrario non è possibile, con una traslazione del segnale, sommare i termini opposti del rumore ed eliminarlo.

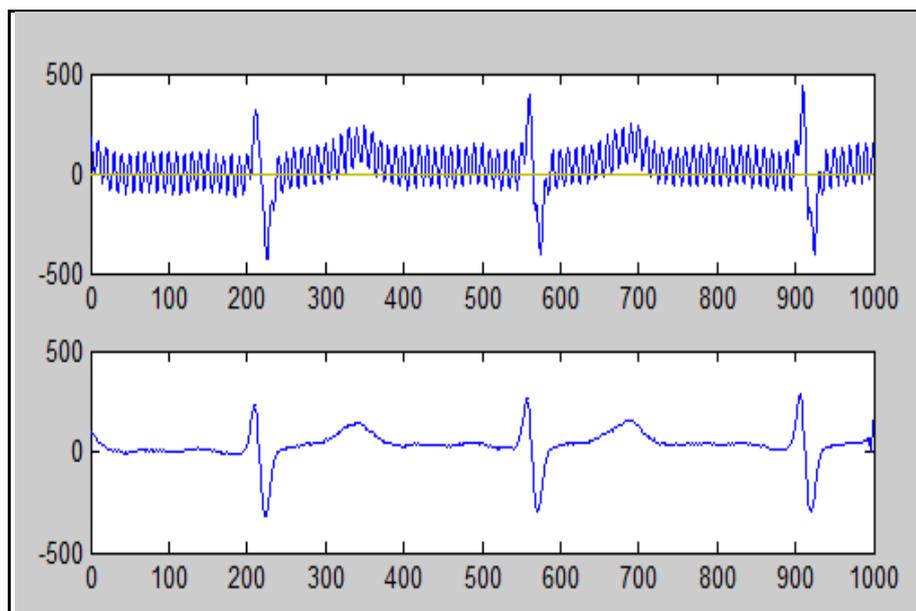


Figura 3.5 - Applicazione della prima tipologia di filtro

3.2 - FILTRO DI NOTCH [8]

Una classe di filtri che più delle altre si presta allo scopo di eliminare rumore concentrato ad una frequenza particolare è la classe dei filtri elimina banda a banda stretta. L'impostazione analitica di questi filtri prevede una funzione di trasferimento con due zeri complessi coniugati e due poli:

$$H(z) = \frac{(1 - e^{-j\omega_0}z^{-1})(1 - e^{j\omega_0}z^{-1})}{(1 - \rho e^{-j\omega_0}z^{-1})(1 - \rho e^{j\omega_0}z^{-1})}$$

Un filtro così fatto ha due zeri complessi coniugati posizionati, sul cerchio unitario, con anomalie corrispondenti alla frequenza da eliminare: $\omega = 2\pi f_0 T_c = 2\pi F$, con F frequenza normalizzata; i poli si troveranno vicini al cerchio unitario ma, comunque, interni allo stesso per evitare fenomeni di instabilità.

Il dati utilizzati in questo lavoro sono segnali ECG campionati con una frequenza di 500 Hz, con un rapporto tra frequenza da eliminare (frequenza di rete a 50 Hz) e frequenza di campionamento pari a 1/10.

Si implementa un primo filtro elimina banda con le seguenti caratteristiche:

funzione di trasferimento:

$$H(z) = \frac{1 - 2 * \cos(\omega_0) z^{-1} + z^{-2}}{1 - 2\rho * \cos(\omega_0) z^{-1} + \rho^2 z^{-2}}$$

equazione alle differenze:

$$y(n) = x(n) - 2 \cos(\omega_0) x(n - 1) + x(n - 2) + 2\rho \cos(\omega_0) y(n - 1) - \rho^2 y(n - 2)$$

Si posizionano i poli molto vicini alla circonferenza unitaria ponendo $\rho = 0.99$.

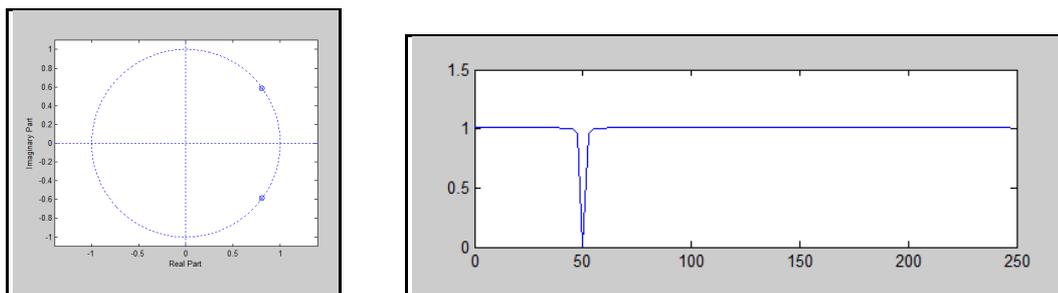


Figura 3.6 - Posizione degli zeri e dei poli sul piano complesso e risposta in frequenza del filtro notch ($\rho=0.99$)

La funzione che rappresenta la risposta in frequenza del filtro presenta un evidente solco in corrispondenza della frequenza da eliminare, tale solco è tanto più stretto quanto più il valore di ρ è prossimo a 1. Confrontando il segnale originale con il segnale in uscita dal filtro si nota, già da un esame visivo, una netta attenuazione delle oscillazione causate dal rumore di rete ma risulta altresì evidente una zona iniziale in corrispondenza della quale il tracciato ECG continua ad essere affetto da disturbo.

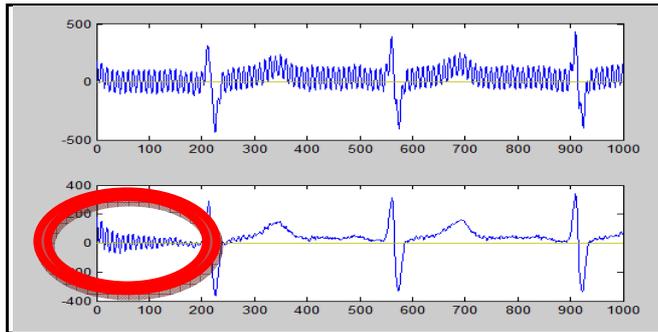


Figura 3.7 - Filtraggio del segnale con il filtro di notch ($\rho=0.99$)

Volendo applicare modifiche al filtro si esclude la possibilità di cambiare frequenza di taglio perché, sebbene l'andamento dell'interferenza del disturbo di rete non sia perfettamente regolare, in ogni caso è centrato sulla frequenza di 50 Hz. Quello che si può fare è invece modificare la pendenza del solco che appare nella funzione di trasferimento e ridurre il valore di ρ . In particolare si hanno due fenomeni contrastanti:

- scegliendo un valore di ρ molto vicino ad 1 si seleziona (elimina) in maniera molto puntuale la frequenza di taglio senza creare distorsioni del segnale relative a frequenze diverse; di contro, il segnale in uscita, presenta uno stato transitorio (*transient state*) tanto più lunga quanto più ρ è vicino ad uno;

- al contrario, con una curva meno ripida si riduce il transitorio ma si rischia di creare distorsioni al segnale perché la funzione di trasferimento si allontana dal valore unitario in corrispondenza delle frequenze proprie del segnale ECG.

Il problema relativo allo stato transitorio iniziale potrebbe essere trascurato, considerando che l'analisi del segnale, in tutte le sue modalità alle quali si è accennato all'inizio del capitolo, può svolgersi serenamente senza prendere in considerazione la zona in questione. Questo effetto del filtraggio diventa però un problema quando si utilizzano *filtri adattivi*: si tratta di filtri più elaborati che, partendo dal presupposto che non si conoscano né il segnale desiderato, né le caratteristiche del disturbo, modificano i loro parametri (si adattano) in base ai dati di ingresso e a verifiche effettuate in tempo reale sulle uscite. Quando ad ogni modifica delle caratteristiche del filtro fa seguito uno *stato transitorio* di non trascurabile lunghezza, il segnale in uscita risulta gravemente alterato.

Nelle figure 3.8 e 3.9 si mostrano le caratteristiche di un filtro con $\rho=0.8$ e l'andamento del segnale in ingresso ed in uscita dal filtro.

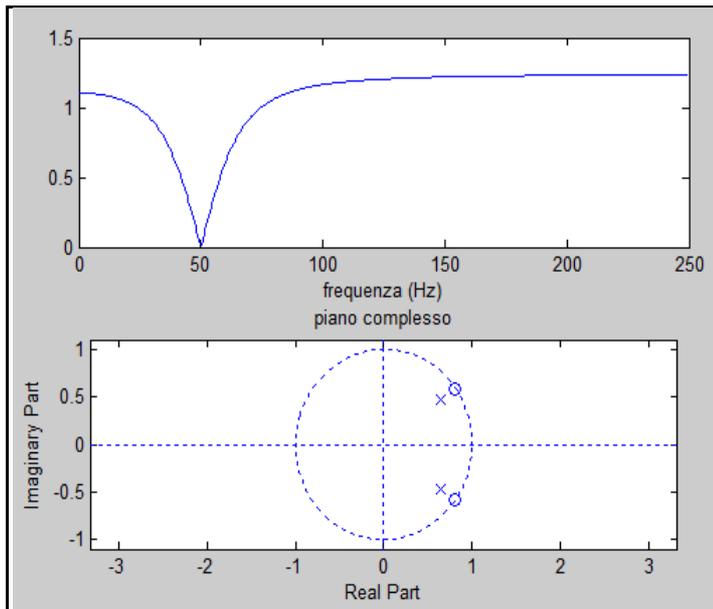


Figura 3.8 Risposta in frequenza e posizione degli zeri e dei poli sul piano complesso del filtro notch ($\rho=0.99$)

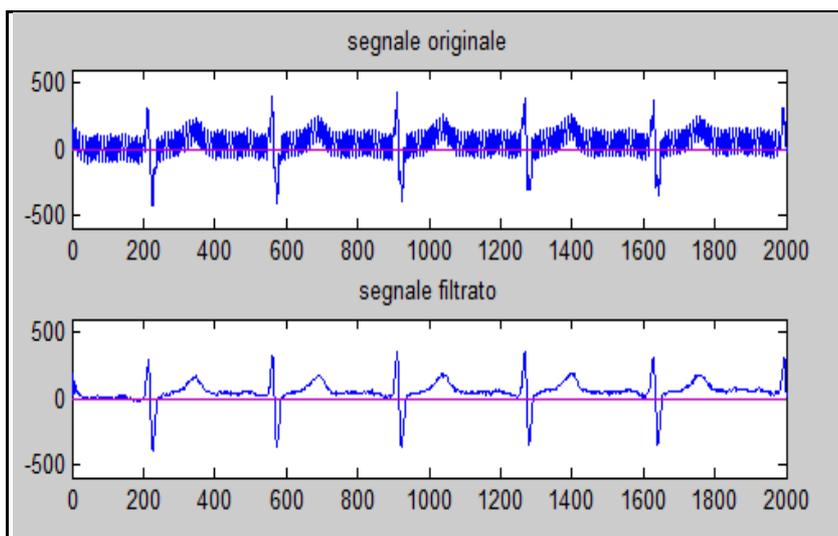


Figura 3.9 - Filtraggio del segnale con il filtro di notch ($\rho=0.80$)

Si vede come lo stato transitorio iniziale sia notevolmente ridotto rispetto al caso analizzato in precedenza. Si vedrà nel seguito che, in questo caso in particolare l'utilizzo di un filtro di questo tipo non comporta particolari differenze.

Per entrambi, nel dominio della frequenza, come ipotizzato, c'è un netto decadimento del contributo in corrispondenza della frequenza di rete.

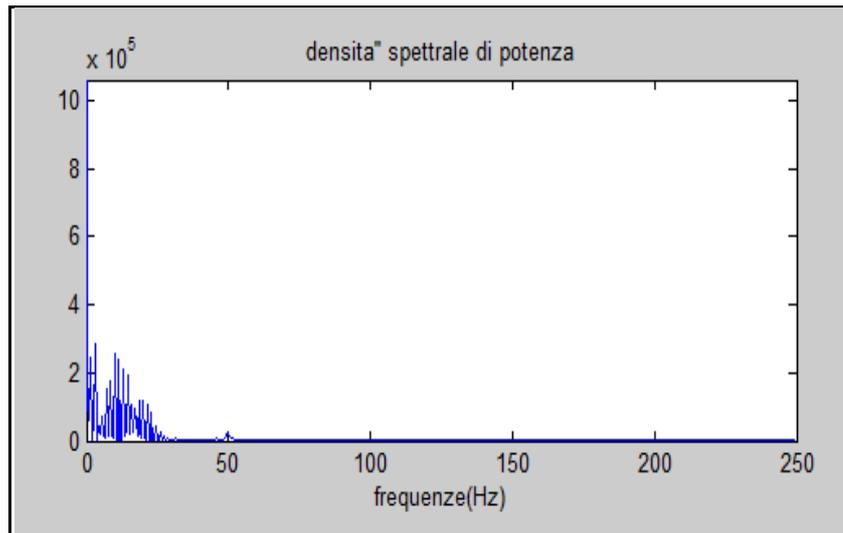


Figura 3.10 - Densità spettrale di potenza del segnale filtrato

3.3 - FILTRI PASSA - BASSO

Filtro FIR

Una possibile alternativa per eliminare il disturbo di rete da un tracciato ECG è l'utilizzo di filtri passa basso. La densità spettrale di potenza è, infatti, concentrata alle basse frequenze e quindi, eliminando le frequenze superiori ad una determinata soglia, si può eliminare il disturbo senza alterare significativamente la parte di interesse.

Il primo filtro passa - basso utilizzato è progettato con il metodo MINIMAX (par. 2.3) utilizzando la funzione di Matlab **firpm**.

In questo caso, per definire i valori più adatti delle frequenze di taglio della banda passante e della banda oscura, è necessaria una lettura più approfondita del comportamento in frequenza del segnale iniziale. Si sceglie per primo il valore della frequenza di taglio in banda oscura: questo perché, sapendo il disturbo concentrato intorno ai 50 Hz, siamo interessati a mantenere il più possibile inalterata la risposta in frequenza per frequenze al di sotto di tale valore. Si sceglie 40Hz e poi ad esso si sottrae un valore per la banda di transizione di 10Hz ottenendo così la frequenza di taglio in banda passante pari a 30 Hz. Al vettore che racchiude le ampiezze sarà assegnato valore unitario in banda passante e valore nullo in banda oscura.

Sempre analizzando il segnale 1 si parte da un progetto con le seguenti specifiche:

frequenza di taglio in banda passante: 30 Hz

frequenza di taglio in banda oscura: 40 Hz

Ampiezza in banda passante = 1

Ampiezza in banda oscura = 0

Si mettono a confronto tre filtri con lunghezze, rispettivamente, pari a $N=11$ - 51 - 111

Il filtri progettati hanno le seguenti caratteristiche:

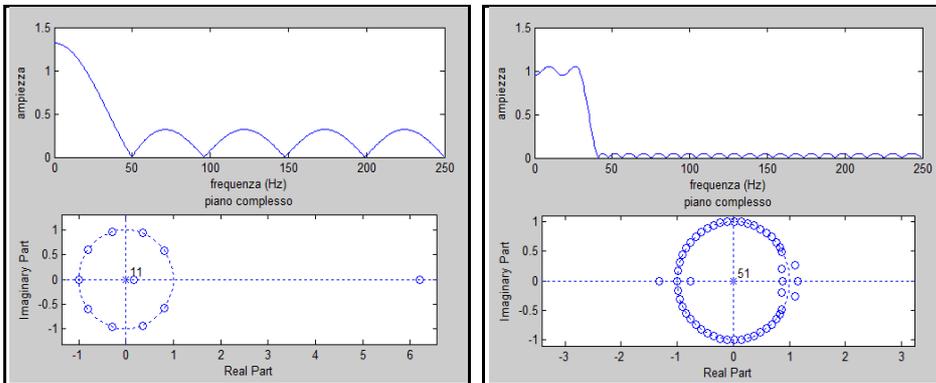


Figura 3.11 Risposta in frequenza e posizione degli zeri e dei poli sul piano complesso per il filtro con $N=11$ ed $N=51$

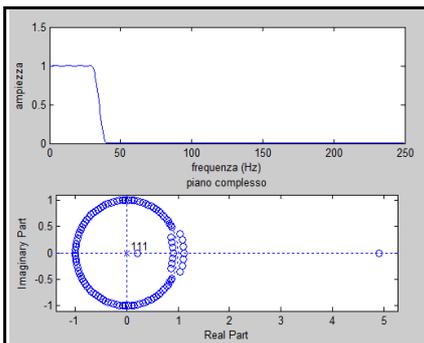


Figura 3.12 Risposta in frequenza e posizione degli zeri e dei poli sul piano complesso per il filtro con $N=111$

Si confrontano i contenuti in frequenza dei segnali $N=11$ e $N=51$

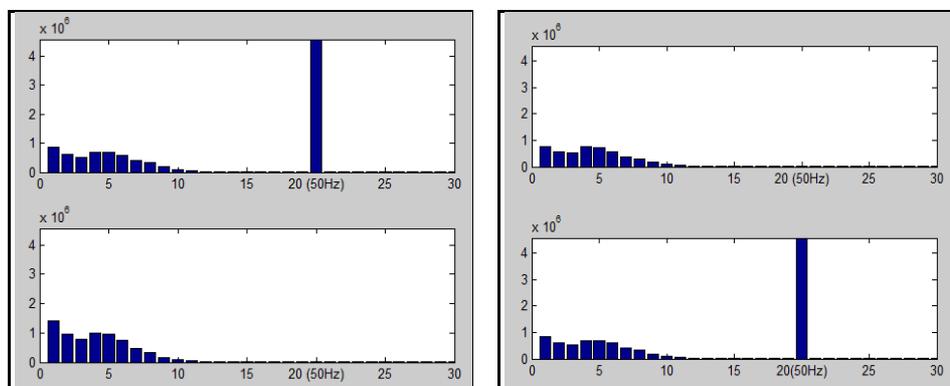


Figura 3.13 - Contenuto in frequenza dei segnali filtrati con filtri passa - basso FIR - $N=11$, $N=51$

Il primo filtro (N=11), oltre ad eliminare il picco in corrispondenza dei 50 H(z), modifica sostanzialmente il contenuto in frequenza del segnale. Questo effetto negativo è ancora presente nel secondo filtro (N=51), ma in maniera molto più attenuata. Nelle figura successiva si riportano l'andamento del segnale in ingresso ed in uscita dal filtro e la densità spettrale di potenza con il filtro N=111:

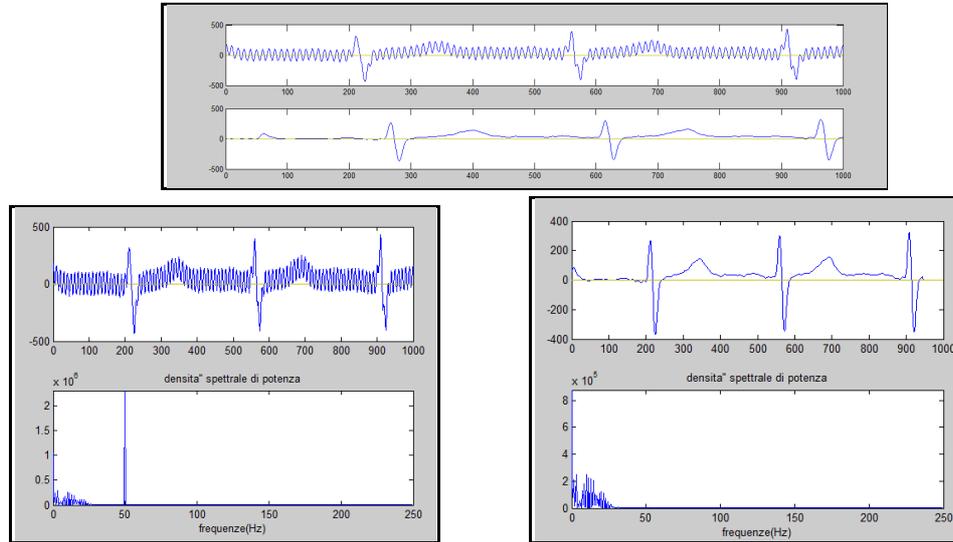


Figura 3.14 - Filtraggio del segnale con filtro passa - basso FIR (N=111) - Densità spettrale di potenza prima e dopo il filtraggio

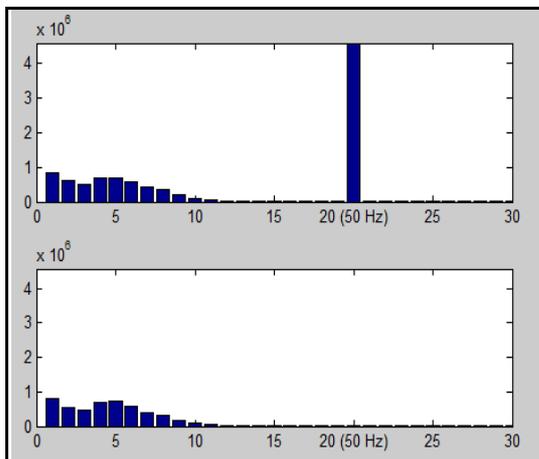


Figura 3.15 - Densità spettrale di potenza prima e dopo il filtraggio

Filtro IIR

Il secondo filtro passa - basso utilizzato è progettato con un metodo diretto risolvendo le equazioni di Yule Walker, utilizzando la funzione di Matlab *yulewalk*.

Si scelgono le stesse specifiche di progetto del filtro calcolato in precedenza. Sempre analizzando il segnale 1 si parte da un progetto con le seguenti specifiche:

frequenza di taglio in banda passante: 30Hz

frequenza di taglio in banda oscura: 40 Hz

Ampiezza in banda passante: 1

Ampiezza in banda oscura: 0

Anche in questo caso si mettono a confronto tre filtri con lunghezze diverse. I filtri IIR raggiungono livelli di selettività elevati con lunghezze molto minori. Si considerano tre filtri con lunghezze rispettivamente pari a $N= 3 - 5 - 11$

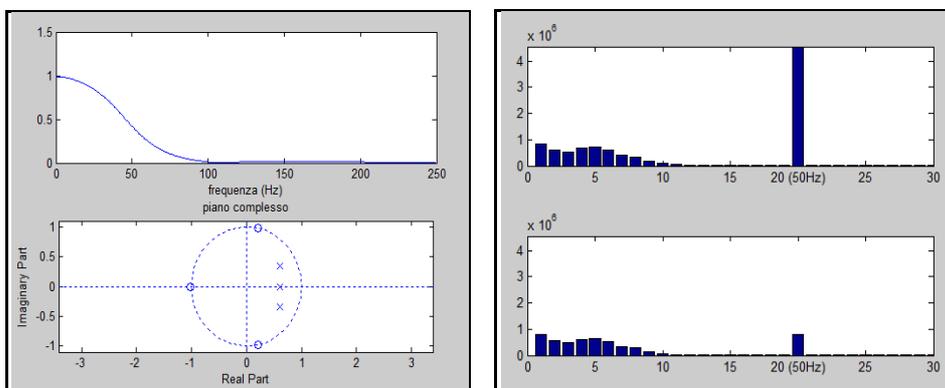


Figura 3.16 Risposta in frequenza e posizione degli zeri e dei poli sul piano complesso per il filtro con $N=3$ - Densità spettrale di potenza

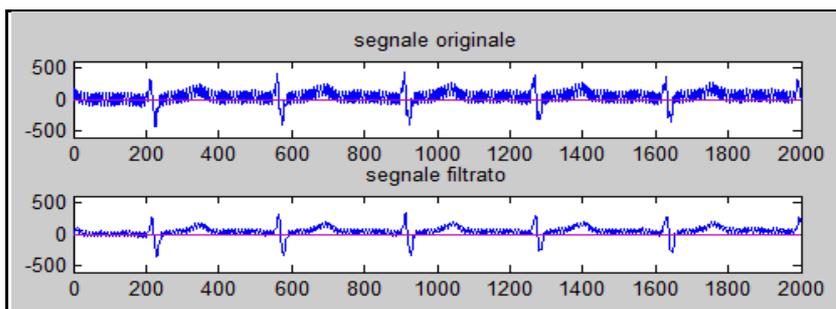


Figura 3.17 - Filtraggio del segnale con il filtro passa - basso IIR ($N=3$)

Nella figura 3.17 è evidente che il segnale filtrato è ancora fortemente disturbato dalla corrente di rete. Si tratta di una ovvia conseguenza del fatto che il contenuto in frequenza del filtro è ancora molto alto in corrispondenza dei 50 Hz.

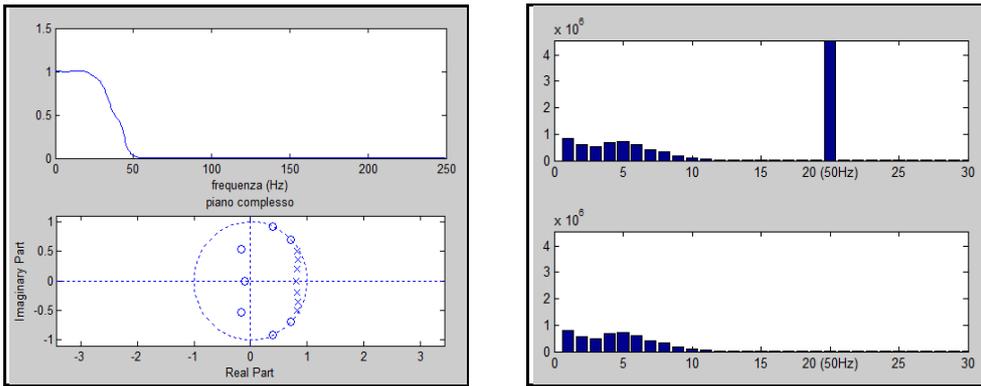


Figura 3.18 - Filtraggio del segnale con filtro passa - basso FIR (N=111) - Densità spettrale di potenza prima e dopo il filtraggio

Nelle figura successiva si riportano l'andamento del segnale in ingresso ed in uscita dal filtro con N=11 e la densità spettrale di potenza:

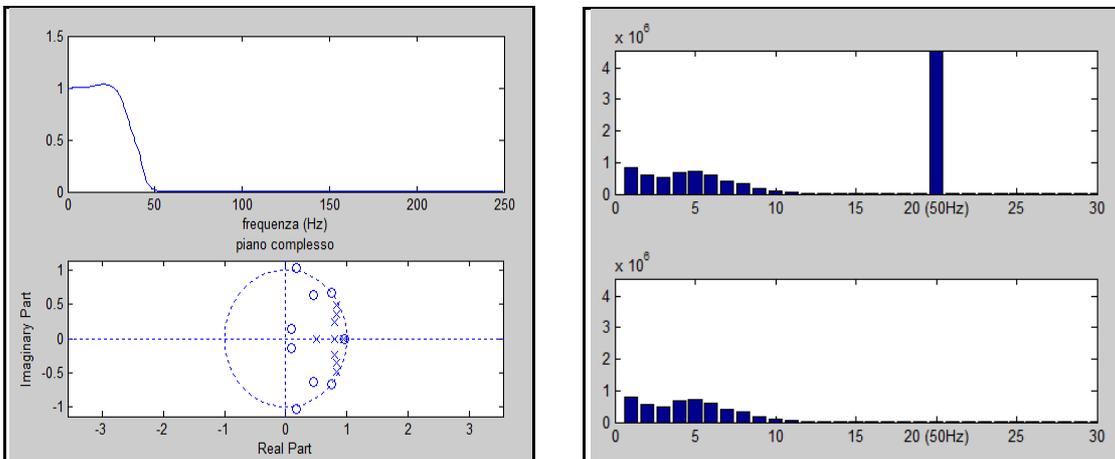


Figura 3.19 Risposta in frequenza e posizione degli zeri e dei poli sul piano complesso per N=11

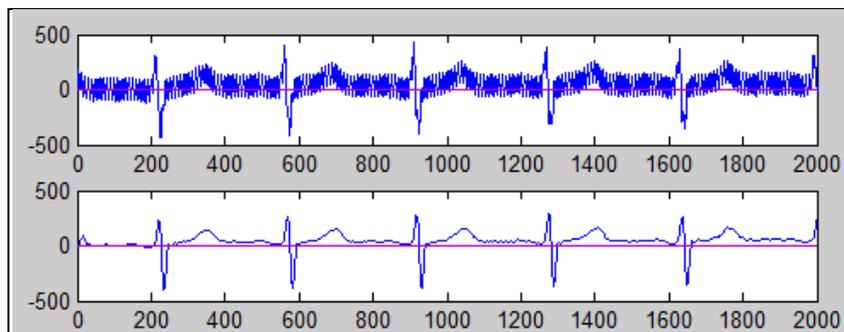


Figura 3.20 - Filtraggio del segnale con il filtro passa - basso IIR (N=11)

3.4 - DECOMPOSIZIONE DEL SEGNALE [3]

I filtri presentati fin'ora sono stati progettati ed applicati partendo dal presupposto che il segnale ECG fosse affetto esclusivamente dal disturbo di rete. Non è possibile però, a priori, sapere se l'uscita dal filtro rappresenti solo ed esclusivamente l'attività elettrica cardiaca e quindi il segnale ECG desiderato. Per prima cosa il disturbo di rete non è l'unico disturbo presente; è noto che ulteriori disturbi al segnale ECG siano rappresentati anche dal tremore muscolare, dalla temperatura, ect.

Per avere una misura del livello di conoscenza del segnale si procede in questo modo:

1. si sottrae al segnale originale il segnale in uscita dal filtro;
2. partendo da quest'ultimo segnale si calcola una sinusoide con frequenza pari alla frequenza di rete che dovrebbe appunto rappresentare il segnale di disturbo e si sottrae anch'essa al segnale;
3. si calcola la funzione di autocorrelazione ACF del segnale residuo finale.

Se la funzione di autocorrelazione fosse contenuta all'interno dei valori $\pm \frac{2}{\sqrt{n}}$, con n numerosità del campione, potremmo ritenere il segnale residuo rumore. In tal caso l'operazione di filtraggio potrebbe considerarsi ottima, nel senso che, eliminato il disturbo di rete, il segnale estratto rappresenterebbe solo l'attività elettrica del cuore.

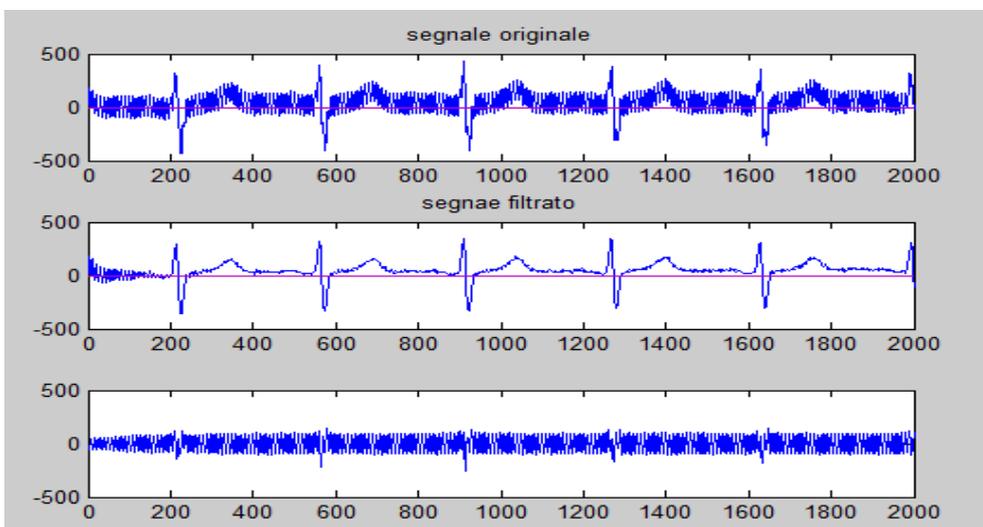
Si avrebbe una decomposizione del segnale di questo tipo:

tracciato ECG + corrente di rete + rumore

In caso contrario è ipotizzabile la presenza di ulteriori elementi di disturbo e/o un diverso andamento della corrente rispetto a quello di sinusoide con frequenza a 50 Hz con il quale è stato modellato.

Si puntualizza che, nell'effettuare l'operazione (indicata con 1.) di sottrazione del segnale filtrato al segnale originale, tutte le volte che l'operazione di filtraggio comporta un ritardo, è prevista prima una traslazione del segnale in uscita.

FILTRO NOTCH



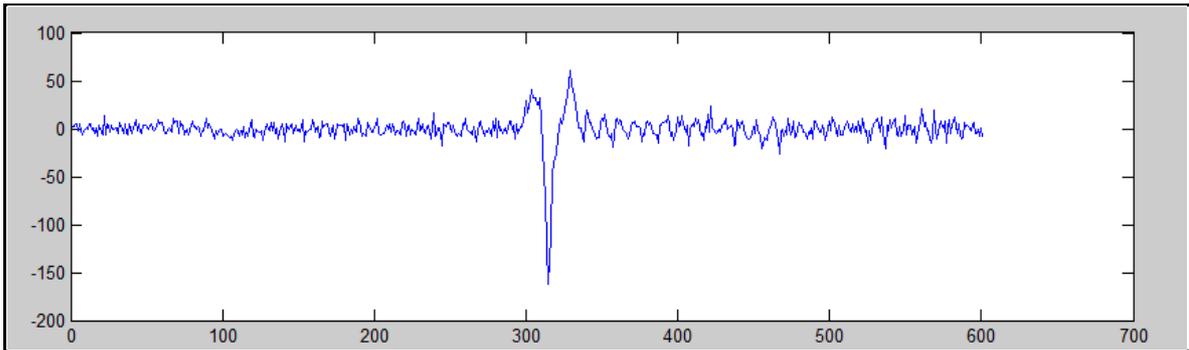


Figura 3.20 - Sono riportati in ordine: il segnale originale, il segnale filtrato, la differenza tra segnale iniziale e segnale filtrato, il residuo che si ottiene sottraendo alla differenza la sinusoide relativa al disturbo di rete (si prende un intervallo di 600 misure, in corrispondenza di tutti i picchi R anche il residuo presenta un picco)

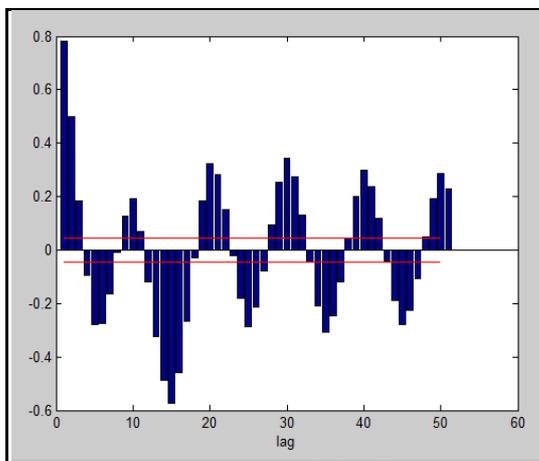
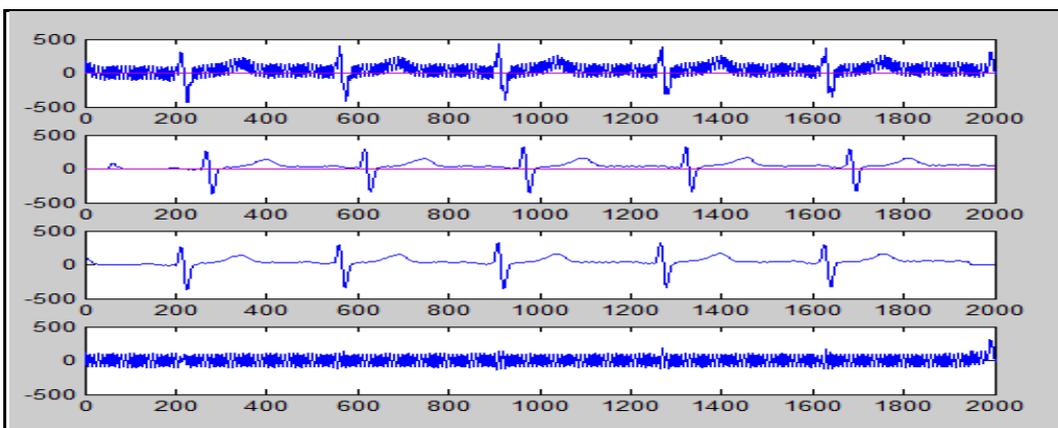


Figura 3.21 - Funzione di autocorrelazione del residuo

La funzione di autocorrelazione del residuo mantiene un livello superiore alla soglia di significatività per numerosi intervalli e quindi non può essere considerato rumore.

FILTRO FIR passa-basso



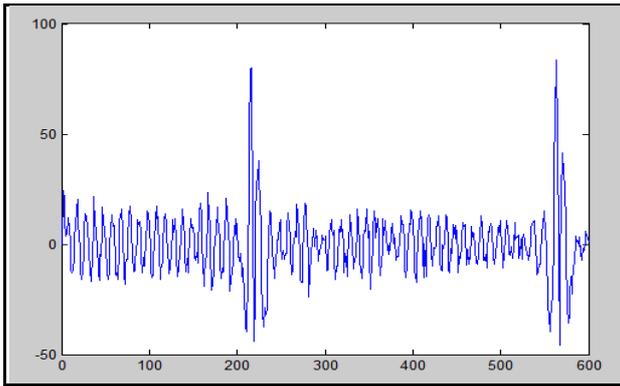


Figura 3.22 Sono riportati in ordine: il segnale originale, il segnale filtrato, il segnale filtrato e traslato, la differenza tra segnale iniziale e segnale filtrato e traslato, il residuo che si ottiene sottraendo alla differenza la sinusoide relativa al disturbo di rete (si prende un intervallo di 600 misure, in corrispondenza di tutti i picchi R anche il residuo presenta un picco)

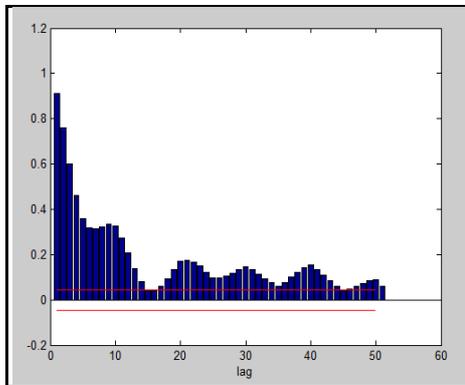
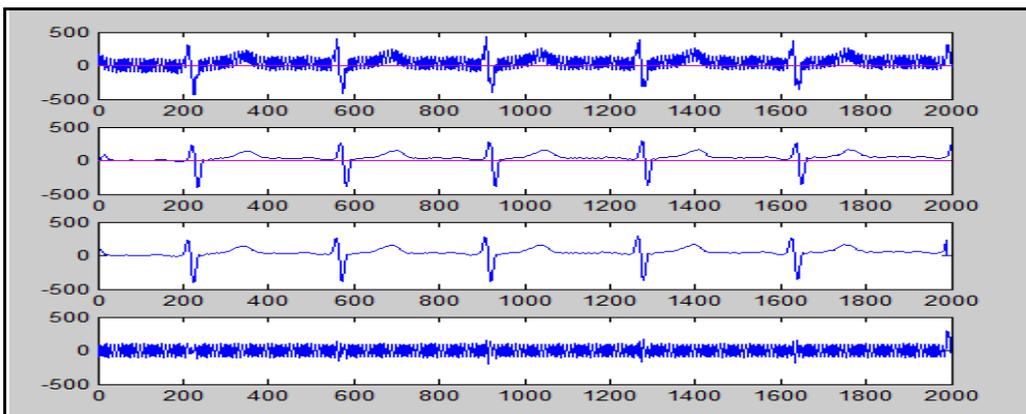


Figura 3.23 - Funzione di autocorrelazione del residuo

FILTRO IIR



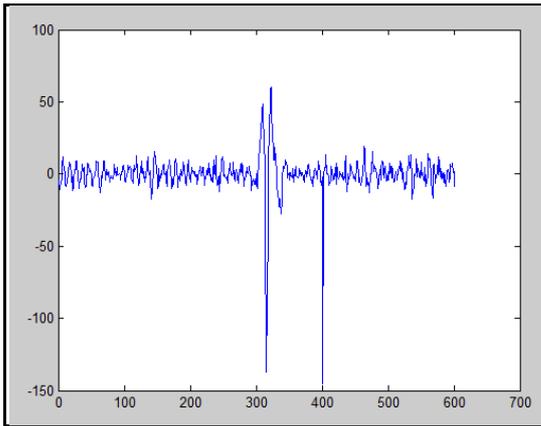


Figura 3.24 Sono riportati in ordine: il segnale originale, il segnale filtrato, il segnale filtrato e traslato, la differenza tra segnale iniziale e segnale filtrato e traslato, il residuo che si ottiene sottraendo alla differenza la sinusoide relativa al disturbo di rete

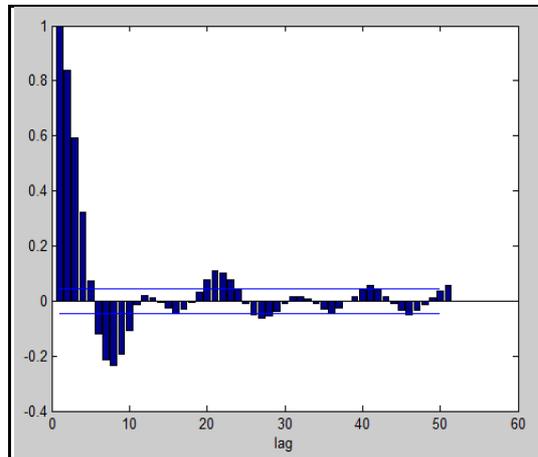


Figura 3.25 - Funzione di autocorrelazione del residuo

Inoltre, tutti e tre i filtri presentano un'autocorrelazione dei residui non trascurabile e con una connotazione periodica.

3.5 - DENSITA' SPETTRALE DI POTENZA

Si analizza più in dettaglio il contenuto in frequenza mettendo a confronto, per i quattro segnali (segnale originale e segnali filtrati con filtro notch e i due filtri passa basso), il contenuto in frequenza relativo a 30 intervalli 2.5 Hz.

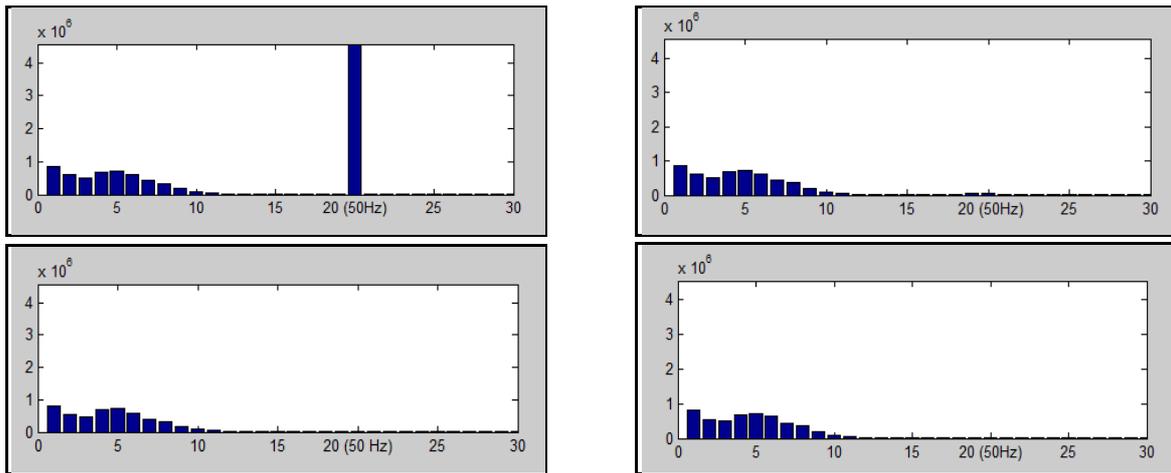


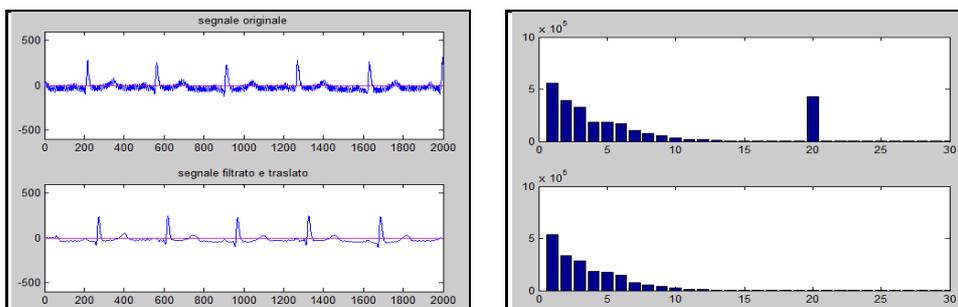
Figura 3.26 - Spettro di potenza relativo al segnale originale, e al segnale filtrato, rispettivamente con il filtro do notch, il filtro passa-basso FIR ed il filtro passa-basso IIR

Il contenuto in frequenza è confrontabile con quello originale per i filtri passa-basso. Questo è ragionevole, anche in considerazione del fatto che i filtri sono stati progettati con algoritmi affidabili e con una funzione di trasferimento molto simile. Il filtro notch, riesce anch'esso ad eliminare il picco dovuto alla corrente di rete e garantisce il mantenimento dello stesso comportamento in frequenza alle basse frequenze.

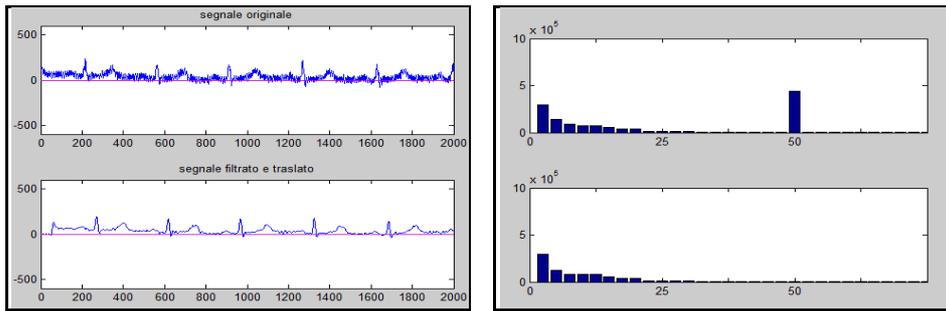
Come già precisato, le analisi fin qui presentate hanno come oggetto l'undicesima derivazione dell'esame ECG sotto sforzo. Si illustrano di seguito i tracciati delle altre derivazioni filtrati ed il loro contenuto in frequenza che risulta, in alcuni casi, anche notevolmente differente. Questa differenza è dovuta, in parte, al disturbo causato dall'attività muscolare che emerge in maniera più o meno evidente, in base alla posizione degli elettrodi sulle zone del corpo del paziente.

Per le dodici derivazioni si riporta l'andamento del segnale prima e dopo il passaggio attraverso il filtro FIR e ed i relativi spettri di ampiezza

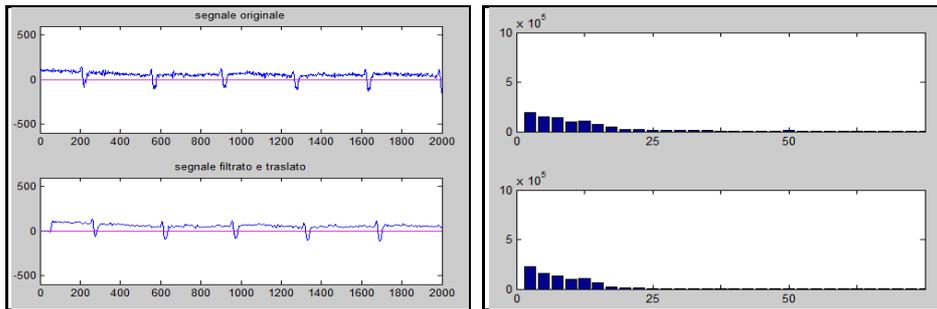
Prima derivazione



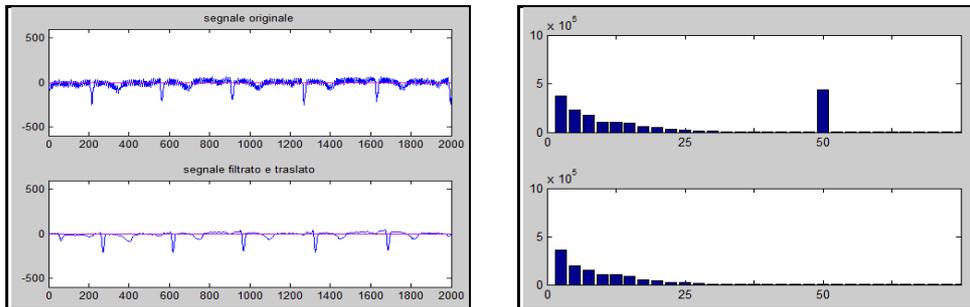
Seconda derivazione:



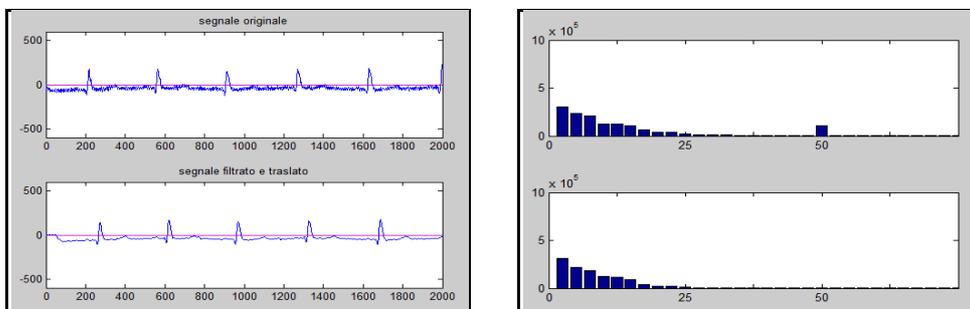
Terza derivazione:



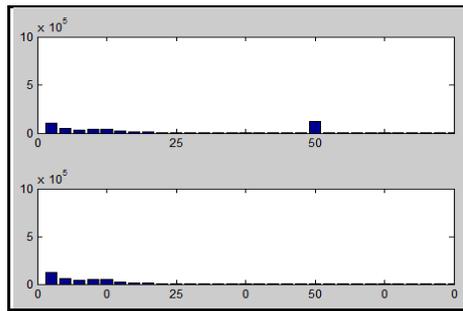
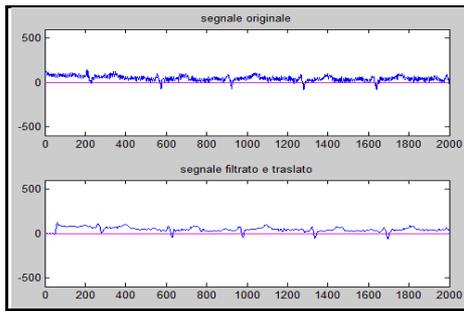
Quarta derivazione



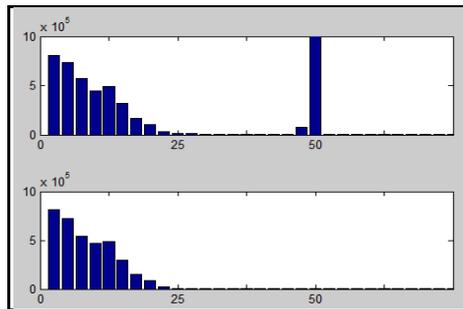
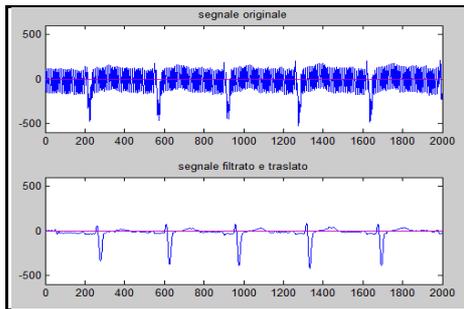
Quinta derivazione



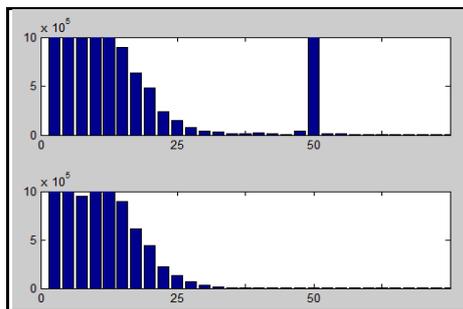
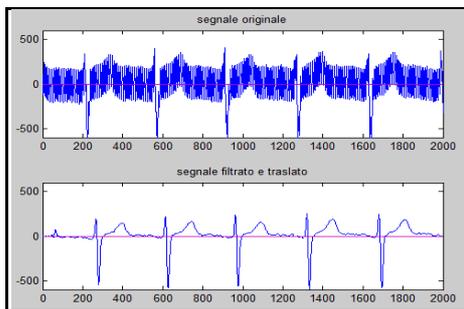
Sesta derivazione



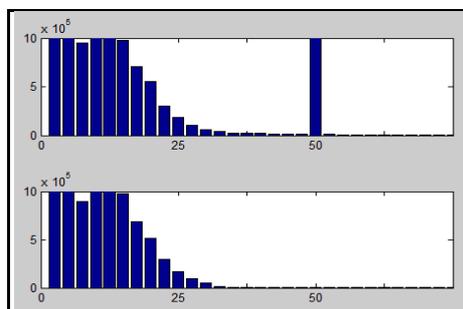
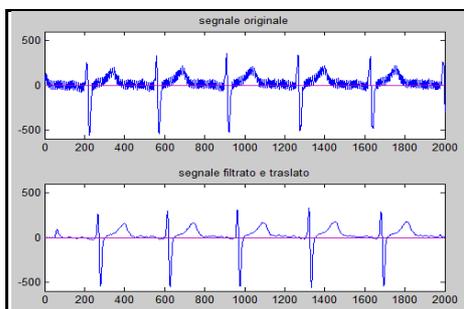
Settima derivazione



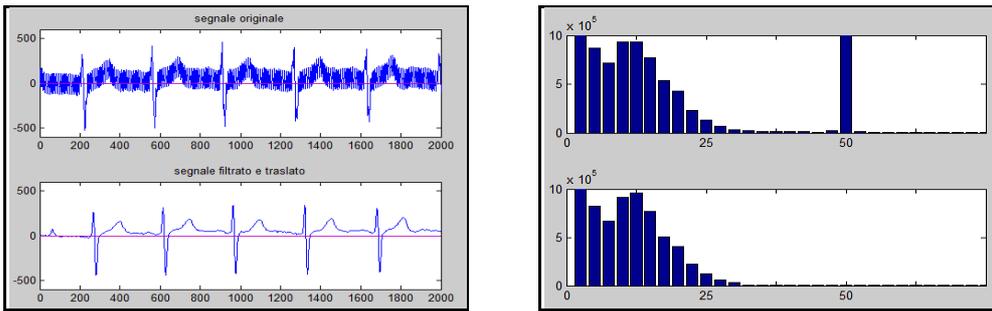
Ottava derivazione



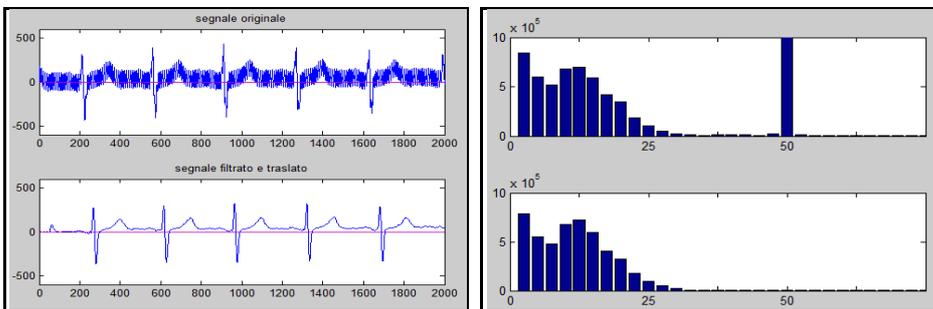
Nona derivazione



Decima derivazione



Undicesima derivazione



Dodicesima derivazione

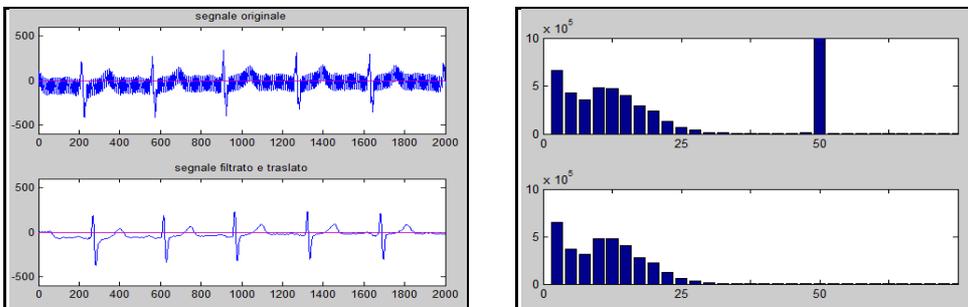


Fig. 3.27 - Tracciati ECG delle 12 derivazioni e contenuti in frequenza

Un ulteriore confronto viene effettuato sul segnale relativo allo stesso tipo d'esame su pazienti diversi. Si prende sempre in considerazione l'undicesima derivazione e si applica il filtri FIR di lunghezza N = 111. Dall'operazione di filtraggio si ottengono risultati analoghi:

Paziente II

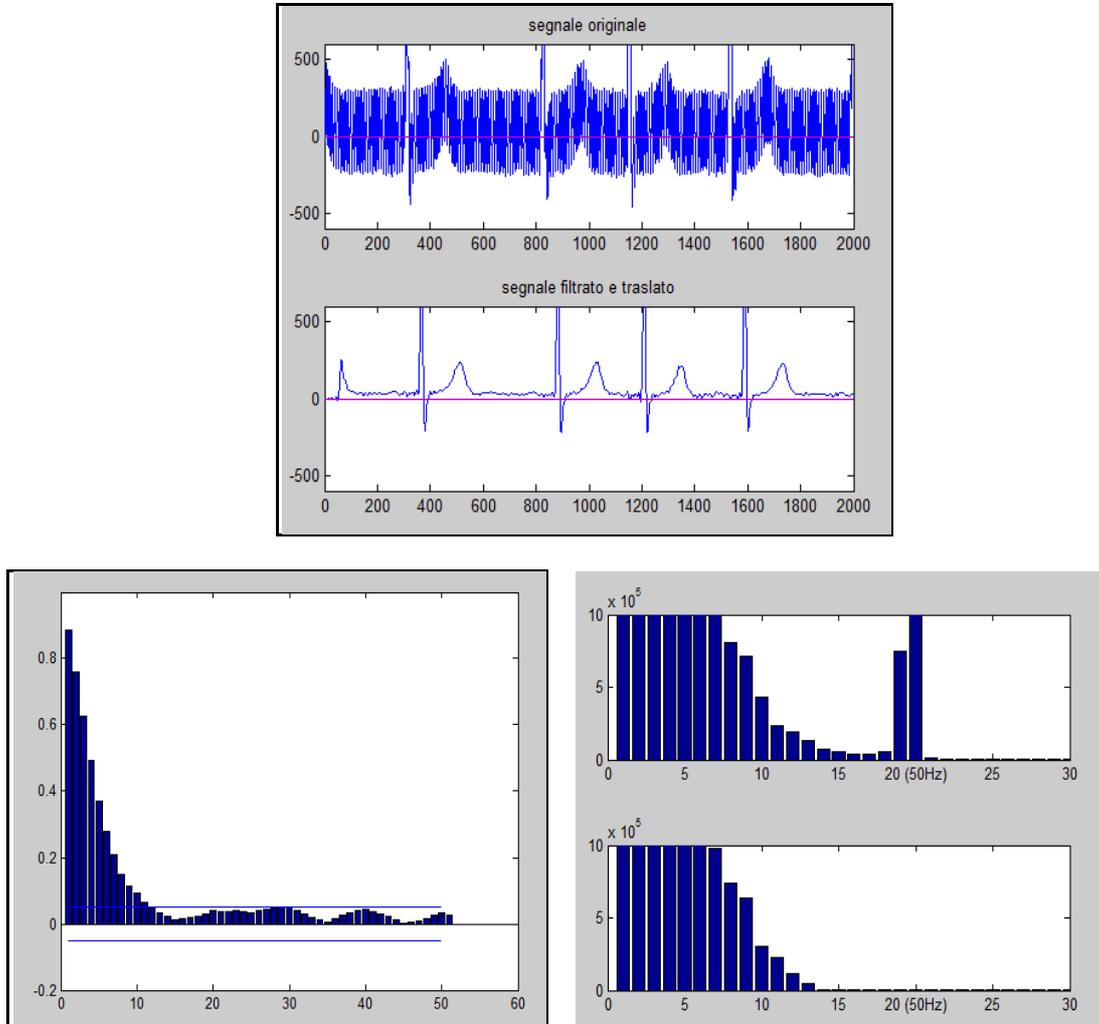
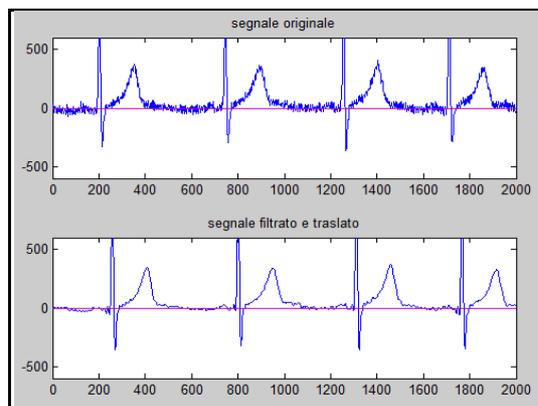


Fig. 3.28 -Segnale ECG iniziale e filtrato - Autocorrelazione dei residui - Densità spettrale di potenza

Paziente III



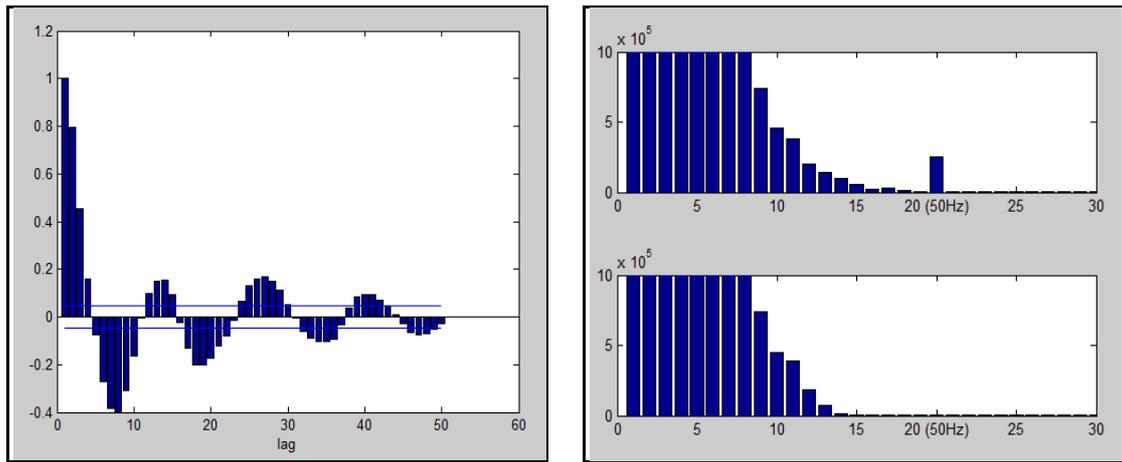


Fig. 3.29 -Segnale ECG iniziale e filtrato - Autocorrelazione dei residui - Densità spettrale di potenza

Paziente IV

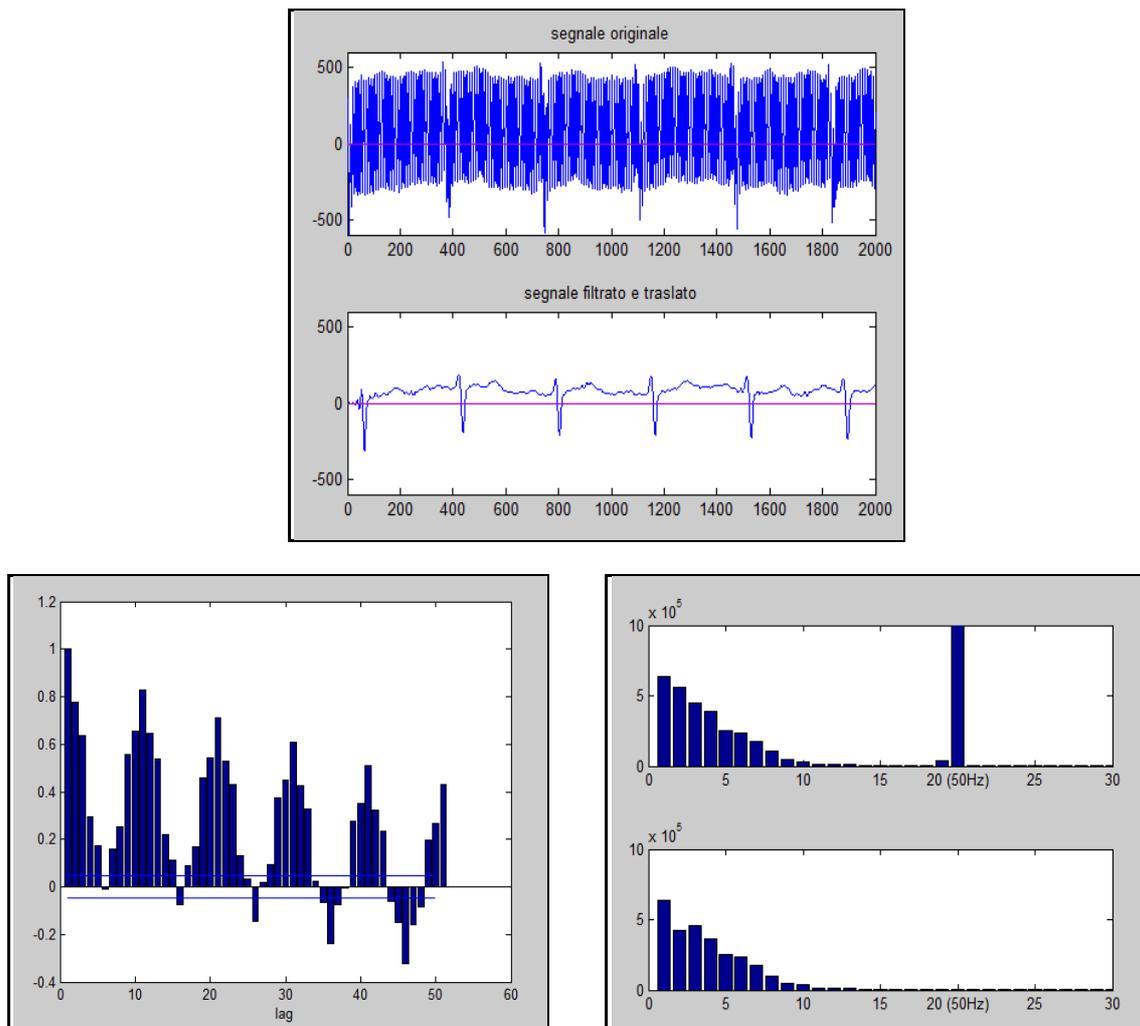


Fig. 3.30 -Segnale ECG iniziale e filtrato - Autocorrelazione dei residui - Densità spettrale di potenza

3.6 FILTRAGGIO DEL SEGNALE NELLE CONDIZIONI DI MASSIMO SFORZO

I segnali analizzati in questo lavoro sono elettrocardiogrammi ottenuti dalla prova sotto sforzo. Questo esame viene effettuato per monitorare l'attività cardiaca in condizioni di sforzo e valutare l'eventuale presenza di ischemia miocardica. Può essere effettuato con le seguenti modalità: inizialmente in condizioni di riposo, il paziente si sottopone ad attività fisica, e incrementa il livello di sforzo fino a raggiungere una frequenza cardiaca circa pari all'85% di quella massima, variabile con l'età. Raggiunto il picco inizia la fase di recupero. Questo ciclo sforzo - recupero, appare nel tracciato ecg con una riduzione della distanza tra i picchi R-R e si può più facilmente visualizzare utilizzando il tacogramma, che presenta, a meno di oscillazioni, un trend negativo nella fase di stress ed un trend positivo nella fase di recupero come evidenziato nell'immagine in basso.

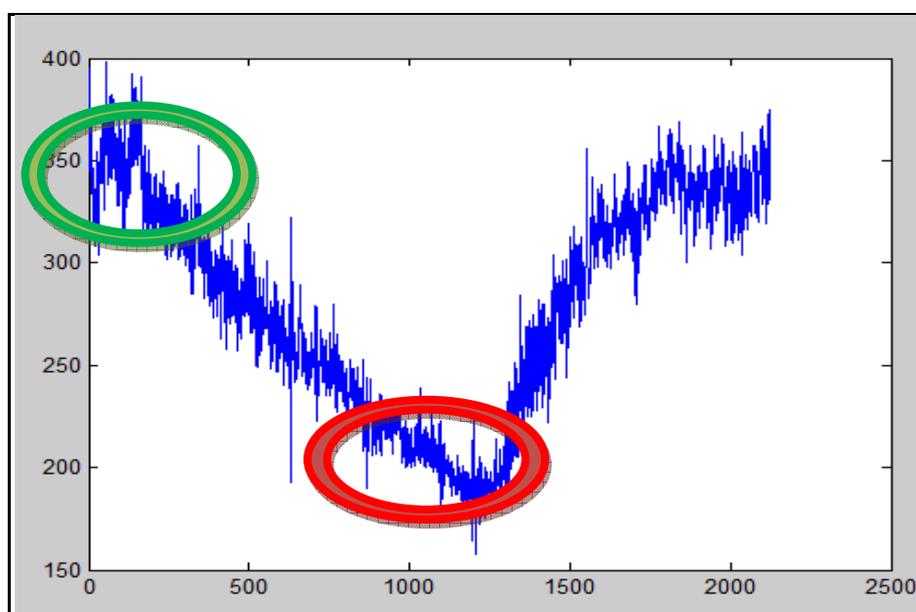


Figura 3.31 - Esempio di tacogramma relativo ad un ECG sotto sforzo

Le analisi effettuate fin qui si riferiscono alla fase iniziale dell'esame e quindi alla zona verde in figura. In questo paragrafo si intende valutare l'effetto delle stesse operazioni di filtraggio nella fase di massimo sforzo, individuata in rosso. Le sequenze considerate constano di 2000 misure che, nella fase iniziale corrispondevano a sei cicli (sei picchi R). Chiaramente, nello stesso intervallo temporale, in condizioni di massimo sforzo si avrà un incremento del numero di picchi R. Per individuare all'interno dell'intera sequenza di misure l'intervallo di 2000 punti, che corrisponde alla massima fase di sforzo, si determina il tacogramma implementando uno degli algoritmi più utilizzati per la determinazione dell'intervallo R-R, l'algoritmo Pan - Tompkins. [5]

Questo algoritmo prevede il passaggio del segnale attraverso le quattro tipologie di filtri descritte con le relative equazioni alle differenze:

filtro passa-basso (seleziona le frequenze minori di 11 Hz)

$$y_t = \frac{1}{36}(2y_{t-1} - y_{t-2} + x_t - 2x_{t-6} + x_{t-12})$$

filtro passa-alto (seleziona le frequenze maggiori di 5 Hz)

$$y_t = x_{t-16} - \frac{1}{32}(y_{t-1} + x_t - x_{t-32})$$

filtro tipo derivata

$$y_t = \frac{1}{8}(2x_t + x_{t-1} - x_{t-3} - 2x_{t-4})$$

filtro media mobile

$$y_t = \frac{1}{75} \sum_{i=0}^{74} x_{t-i}$$

in questo modo si mette in evidenza la zona QRS del tracciato per renderne più agevole la determinazione. Il filtro a media mobile effettua una media su un numero di misure che dipende dalla frequenza di campionamento. L'intervallo di tempo deve essere pari a 0.15s che, nella fattispecie, corrispondono a 75 misure.

Per il segnale analizzato è stato ottenuto il tacogramma illustrato in figura 3.23. Per le analisi si considerano le 2000 misure immediatamente precedenti al picco individuato che dovrebbero rappresentare i 4 secondi (2000/500) durante i quali il battito del paziente esaminato raggiunge la massima velocità.

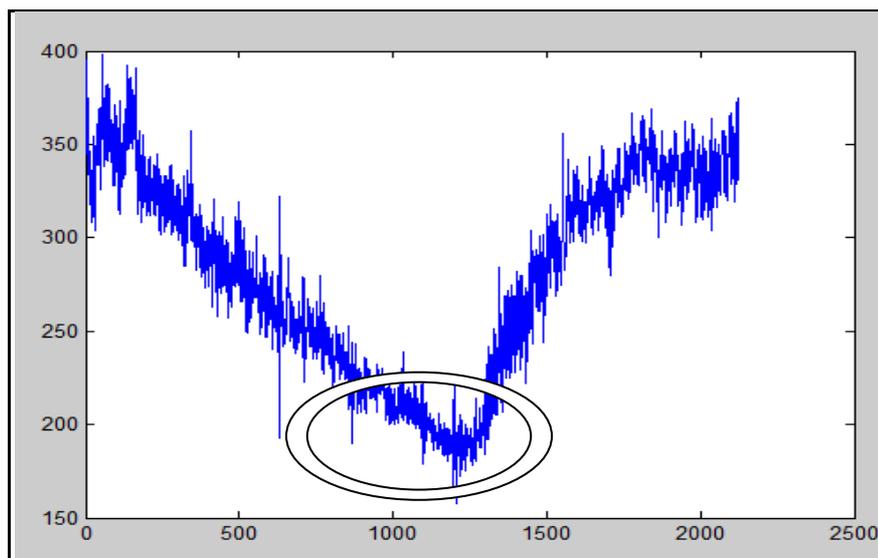


Figura 3.32 - Tacogramma relativo alla prova sotto sforzo del primo paziente

Il tracciato del segnale, sempre corrispondente all'undicesima derivazione, presenta, come ovvio, una diminuzione dell'intervallo tra i picchi R.

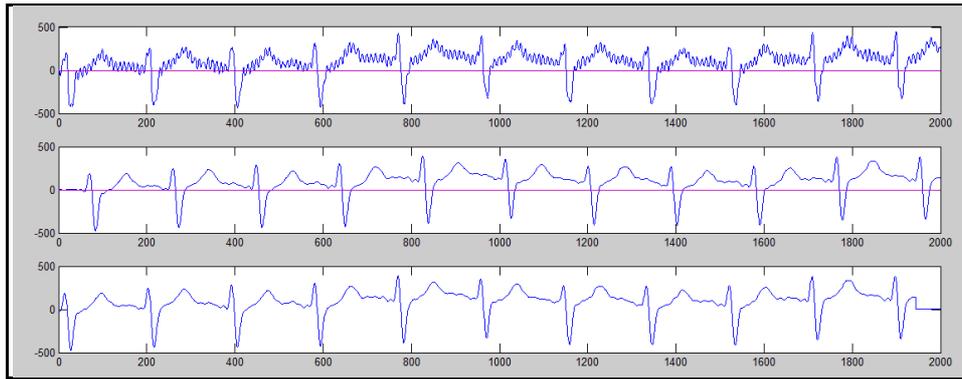


Fig. 3.33 - Tracciato ECG nelle condizioni di massimo sforzo

Il contenuto in frequenza risulta modificato; c'è un incremento delle ampiezze in corrispondenza delle basse frequenze. Questa variazione non incide sulle frequenze che ricadono nella banda oscura dei filtri utilizzati che possono, quindi, essere utilizzati anche per filtrare questi segnali.

FILTO NOTCH

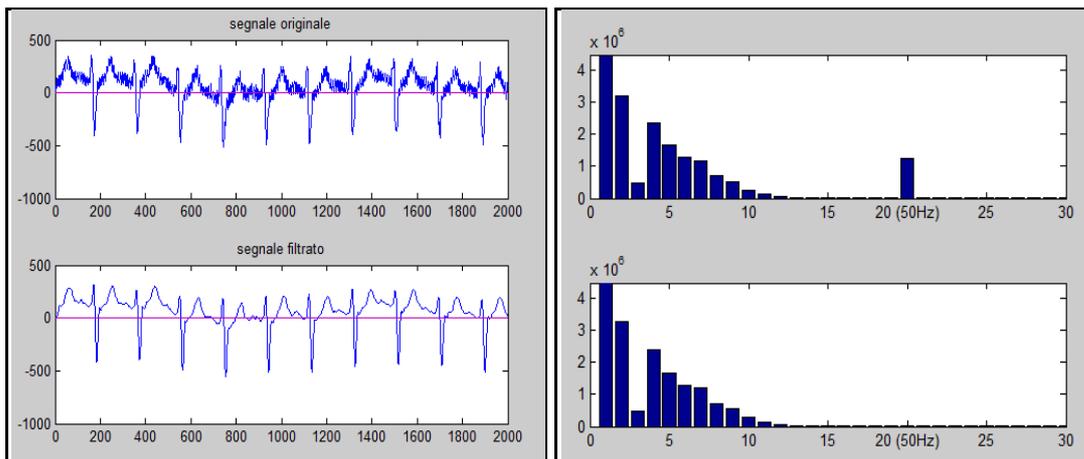


Figura 3.34 - Filtraggio del segnale e relativi contenuto in frequenza

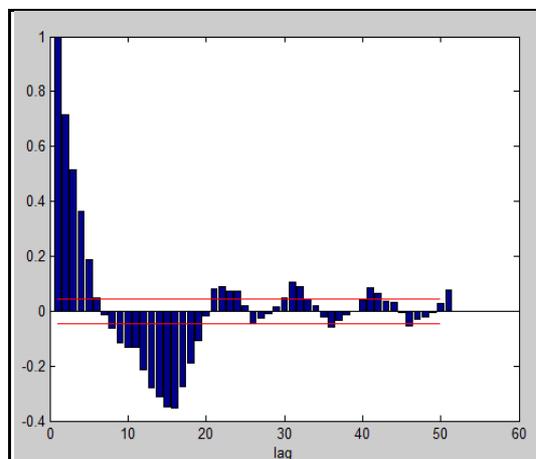


Figura 3.35 - Funzione di autocorrelazione in condizioni di massimo sforzo

FILTRO FIR

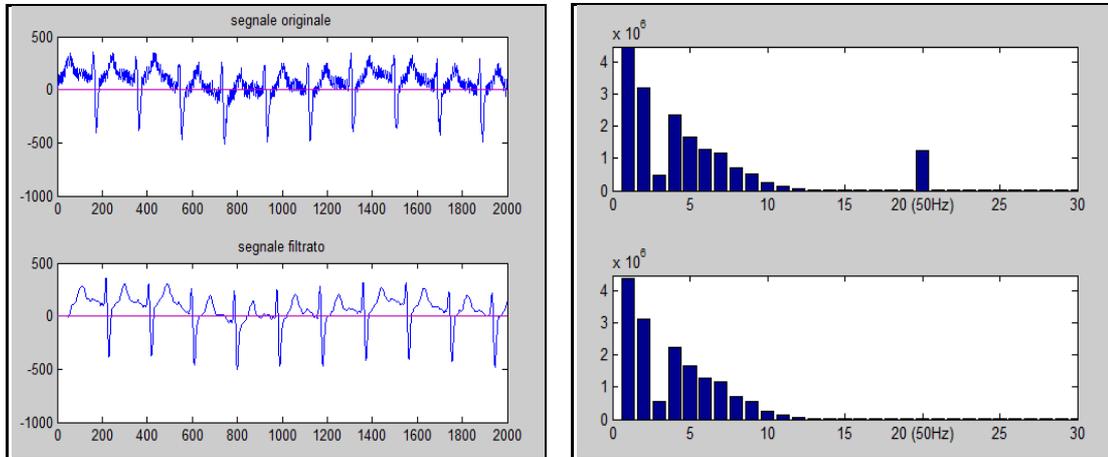


Figura 3.36 - Filtraggio del segnale e relativi contenuto in frequenza

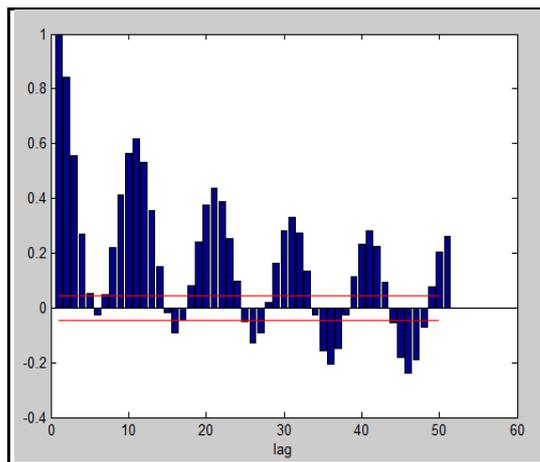


Figura 3.37 - Funzione di autocorrelazione in condizioni di massimo sforzo

FILTRO IIR

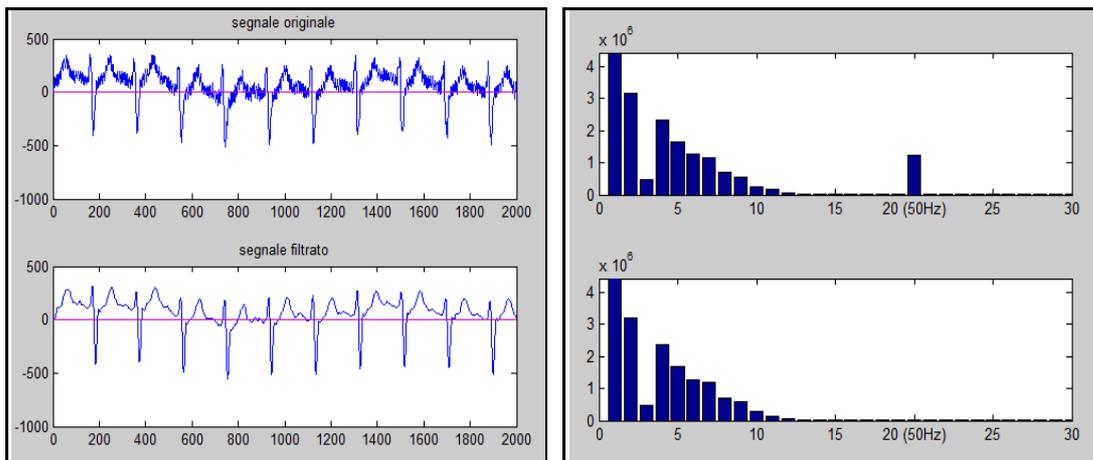


Figura 3.38 - Filtraggio del segnale e relativi contenuto in frequenza

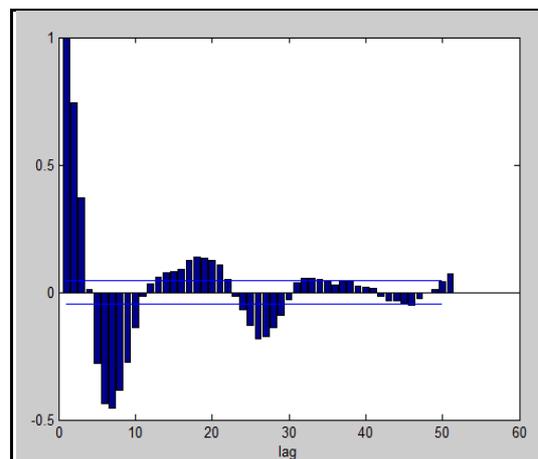


Figura 3.39 - Funzione di autocorrelazione in condizioni di massimo sforzo e in condizioni iniziali

CONCLUSIONI

Le analisi svolte in questo lavoro confermano la possibilità di utilizzare entrambe le tipologie di filtri, passa - basso ed elimina banda, per attenuare o, a limite, eliminare il disturbo di rete sul tracciato ECG. Utilizzando filtri di opportuna lunghezza si riesce a mantenere il contenuto in frequenza alle basse frequenze sostanzialmente inalterato rispetto a quello iniziale.

I risultati ottenuti utilizzando il filtro FIR (a risposta impulsiva finita) e quelli ottenuti con il filtro IIR (risposta impulsiva infinita) sono confrontabili se si utilizzano lunghezze rispettive notevolmente diverse.

Nelle condizioni di massimo sforzo la variazione del contenuto in frequenza del particolare segnale analizzato si registra principalmente alle basse frequenze e risulta, quindi, possibile utilizzare filtri analoghi a quelli utilizzati per il segnale relativo alla fase iniziale della prova sotto sforzo.

La decomposizione del segnale, successiva all'operazione di filtraggio, ed i risultati ad essa correlati, non ci permettono, in nessun caso di poter affermare che il segnale in uscita dal filtro non sia affetto da altre componenti, infatti, la funzione di autocorrelazione del residuo del segnale filtrato al quale si sottrae la sinusoide con frequenza di 50 Hz, rappresentativa del disturbo di rete, non scende al di sotto della soglia di significatività almeno per i primi 20 intervalli.

BIBLIOGRAFIA

- [1] E. Del Re - Elementi di elaborazione numerica dei segnali. *Pitagora* 1997
- [2] A.V. Oppenheim, R.W. Shafer - Elaborazione numerica dei segnali. *Franco Angeli* 1993
- [3] R.H. Shumway, D.S. Stoffer - Time Series Analysis and its applications. *Springer*
- [4] C. Cammarota, E. Rogora - Alcune applicazioni della matematica all'analisi dell'elettrocardiogramma. *Bollettino UMI* 1996
- [5] J. Pan, W.J. Tompkins - A real - time QRS detection algorithm. *IEEE Transactions on biomedical engineering*, vol. BME-32, No.3, March 1985
- [6] B. Friedlander, B. Porat - The modified Yule - Walker method of ARMA spectral estimation. *IEEE Transactions on aerospace and electronic systems*, vol. AES-20, No. 2, March 1984
- [7] T.W. Parks, J.H. McClellan - Chebyshev approximation for nonrecursive digital filters with linear phase. *IEEE Transactions on circuit theory*, vol. CT-19, No.2, March 1972
- [8] Soo-Chang Pei, Chien-Cheng Tseng - Elimination of AC interferences in Electrocardiogram using IIR notch filter with transient suppression. *IEEE Transactions on biomedical engineering*, vol. 42, No.11, November 1995
- [9] F. Rocca, Politecnico di Milano - Elaborazione numerica dei segnali.
www.elet.polimi.it/dsp/courses/ens_l1/books/libro08.pdf
- [10] V. Liberali, Università degli studi di Milano - Teoria dei segnali.
<http://crema.di.unimi.it/~liberali/teoriasegnali/appunti.html>