



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Metodi efficienti per il problema di *Shape from Shading*

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Dipartimento di Matematica
Master di secondo livello in Calcolo Scientifico

Candidato

Rocco Iannacci
Matricola 658743

Relatore

Prof. Maurizio Falcone

Anno Accademico 2012–2013

Ad Annalisa

Indice

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Il problema di Shape from Shading | 1 |
| 1.1 | Modello di Lambert | 2 |
| 1.1.1 | Soluzioni classiche e soluzioni di viscosità | 4 |
| 1.1.2 | Formulazione del modello | 7 |
| 1.1.3 | Modello di Lambert con luce obliqua | 7 |
| 1.2 | Modelli non lambertiani | 8 |
| 1.2.1 | Modello di Oren-Nayar | 9 |
| 1.2.2 | Modello di Phong | 12 |
| 1.3 | Analisi dei parametri dei modelli | 13 |
| 1.3.1 | Modello di Lambert | 13 |
| 1.3.2 | Modello di Phong | 14 |
| 1.3.3 | Modello di Oren-Nayar | 16 |
| 2 | Metodi globali per i modelli di SfS | 19 |
| 2.1 | Modello di Lambert | 19 |
| 2.1.1 | Schema semilagrangiano | 19 |
| 2.1.2 | Derivata della superficie | 20 |
| 2.1.3 | Modello lambertiano con luce obliqua | 21 |
| 2.2 | Ricerca del minimo | 22 |
| 2.2.1 | Luce verticale | 22 |
| 2.2.2 | Luce obliqua | 24 |
| 2.3 | Modelli non lambertiani | 27 |
| 3 | Metodi di accelerazione | 29 |
| 3.1 | Metodo Fast Marching | 29 |
| 3.1.1 | Equazione eiconale | 30 |
| 3.1.2 | Equazione non in forma eiconale | 34 |
| 3.2 | Metodo Fast Sweeping | 35 |
| 3.2.1 | Equazione eiconale | 36 |
| 3.2.2 | Equazione non in forma eiconale | 37 |
| 4 | Risultati | 39 |
| 4.1 | Parametri di valutazione | 39 |
| 4.1.1 | Definizione della mask e del bordo | 39 |

| | | |
|-------|---|----|
| 4.1.2 | Immagini sintetiche | 39 |
| 4.1.3 | Immagini reali | 44 |
| 4.2 | Valutazione dell'errore | 44 |
| 4.3 | Confronti | 44 |
| 4.3.1 | Immagini sintetiche | 46 |
| 4.3.2 | Immagini reali | 50 |
| 4.3.3 | Luce obliqua per il modello lambertiano | 55 |
| 4.4 | Ricerca di un modello generico | 56 |
| 4.5 | Conclusioni | 62 |

Introduzione

Lo scopo di questo lavoro è lo studio di alcuni modelli e metodi per la soluzione del problema di *Shape from Shading*. Per capire di cosa si tratta, consideriamo il meccanismo di visione, o una sua versione semplificata, come l'atto di effettuare una foto di un oggetto [3]. Con un tale atto l'oggetto tridimensionale viene rappresentato su un'immagine bidimensionale. Il problema di *Shape from Shading* (originariamente posto da Horn [11]) consiste nel tentare di effettuare il processo inverso, ovvero ricostruire le dimensioni spaziali dell'oggetto basandosi sulle informazioni bidimensionali contenute nell'immagine. Per risolvere il problema occorre innanzitutto descrivere il modello, vale a dire definire le modalità di formazione dell'immagine in funzione dell'interazione della luce con la superficie dell'oggetto.

I modelli utilizzati descrivono la *riflettanza* della superficie dell'oggetto. La riflettanza è una proprietà fisica del materiale, che descrive come esso diffonde la luce incidente. In generale, l'aspetto dei materiali dipende in larga misura da tale proprietà. Tra i modelli esaminati vi sono: il modello di Lambert, per il quale la luce incidente viene ugualmente diffusa in tutte le direzioni; il modello di Oren-Nayar, che introduce la rugosità della superficie e una diffusione non uniforme in tutte le direzioni; il modello di Phong grazie al quale è possibile descrivere fenomeni di riflessione della luce.

Nel primo capitolo vengono analizzati i tre modelli considerati e, dove possibile, presentati sotto forma di equazione eiconale. Per tutti i modelli viene esaminato il caso di proiezione ortografica e luce verticale (illuminazione dell'oggetto proveniente dallo stesso punto di osservazione ed entrambi posti all'infinito). Per il modello di Lambert viene analizzato anche il caso di luce obliqua (illuminazione dell'oggetto proveniente da una direzione differente da quella dell'osservatore, ma comunque posta all'infinito). Viene introdotto il problema dell'ambiguità concavo/convessa e introdotta la nozione di soluzione di viscosità. Nel § 1.3 viene effettuata un'analisi dei parametri e sull'applicabilità dei modelli al problema di *Shape from Shading*. In particolare viene calcolato un limite di applicabilità per il modello di Oren-Nayar e verificata la definizione della forma eiconale per il modello di Oren-Nayar e per quello di Phong ($\alpha = 1$).

Nel secondo capitolo viene descritto il metodo numerico globale (semigrangiano) utilizzato per la soluzione delle equazioni introdotte nel capitolo

precedente. Viene data una descrizione generale dello schema e del metodo iterativo di punto fisso e la condizione di convergenza alla soluzione massimale. L'applicazione dello schema semilagrangiano consiste nella ricerca del valore minimo, ottenuto interpolando su una griglia discreta di punti. Limitandosi alla sola interpolazione lineare è possibile ottenere il minimo con un numero limitato di confronti sia nel caso di luce verticale (§ 2.2.1) che in quello di luce obliqua (§ 2.2.2).

Nel terzo capitolo vengono analizzati metodi di accelerazione per la soluzione dei problemi introdotti. In particolare vengono descritti i metodi Fast Marching e Fast Sweeping, che sono tra gli algoritmi più diffusi per la soluzione dell'equazione eiconale. Fast Sweeping risulta più veloce per problemi le cui caratteristiche sono linee rette e costanti, mentre Fast Marching risulta più appropriato per problemi le cui caratteristiche sono ampiamente variabili su tutto il dominio di ricostruzione. I metodi si basano sulla possibilità di risolvere i sistemi di equazioni accoppiate, risultanti dalla formulazione alle differenze finite del problema, risolvendo prima le equazioni non legate causalmente con le successive, riducendo enormemente il costo computazionale.

Il metodo Fast Marching suddivide la griglia in tre insiemi separati: i nodi FAR, sui quali non è stato ancora effettuato alcun calcolo, i nodi ACCEPTED, per i quali si suppone che il valore non verrà più cambiato e i nodi CONSIDERED, o NARROW BAND, per i quali il valore calcolato non è ancora definitivo. Procedo, poi alla ricerca locale del minimo nella lista CONSIDERED, fino ad esaurimento della lista stessa. Ad ogni passo i nodi non ACCEPTED, vicini del minimo, vengono ricalcolati e aggiunti alla lista CONSIDERED.

Il metodo Fast Sweeping segue il metodo delle caratteristiche, eseguendo il calcolo del minimo lungo direzioni alternate che privilegiano gruppi specifici di caratteristiche. Tutte le caratteristiche sono divise in un numero finito di gruppi in base alla direzione e ogni iterazione di Gauss-Siedel, eseguita con uno specifico ordine, ne percorre un gruppo specifico. L'applicazione del metodo prevede quattro percorsi alternativi (le quattro possibili direzioni procedendo diagonalmente in una griglia cartesiana), eseguiti in sequenza. Ad ogni passo, i valori della griglia vengono ricalcolati ed accettati se risultano minori del valore precedentemente assunto.

Nel quarto ed ultimo capitolo, vengono descritti i test utilizzati per confrontare metodi e modelli ed i risultati ottenuti. Vengono descritte le immagini sintetiche e reali utilizzate e viene data una definizione dei parametri quantitativi impiegati per la valutazione dei test. Nel § 4.4 viene svolta un'analisi per tentare di stabilire a priori un criterio di scelta ottimale tra i modelli, ovvero una scelta che ci permetta di utilizzare in casi generici un modello più appropriato, per effettuare la ricostruzione di superfici delle quali non si abbia nessuna informazione utile per considerare più appropriato un modello specifico.

*All artistic discoveries are discoveries not of likenesses
but of equivalences which enable us to see reality in
terms of an image and an image in terms of reality.
And this equivalence never rests on the likeness of
elements so much as on the identity of responses to
certain relationships.*

ART AND ILLUSION,
ERNST GOMBRICH

Capitolo 1

Il problema di Shape from Shading

Il problema di *Shape from shading* [12, 23, 8] è un problema classico della Computer Vision. Consiste nella ricostruzione della forma di un oggetto utilizzando le informazioni contenute in una sua immagine. Alcune variazioni del problema prevedono una ricostruzione basata anche su più immagini, ottenute in tempi o con angolazioni diverse.

La tecnica si basa sull'interazione della superficie dell'oggetto, delle sue caratteristiche di diffusione e riflessione, con una sorgente di illuminazione e sulla percezione che un osservatore ha della radianza della superficie stessa. La formulazione del problema si ottiene attraverso la definizione di un modello fisico che descriva il valore osservato di luminosità e ombre dell'immagine.

Per ottenere un modello semplificato, ipotizziamo il modello di luminosità, introducendo alcune approssimazioni:

- ipotizziamo che vi sia una sola sorgente luminosa, posta, come la posizione dell'osservatore, all'infinito, o comunque ad una distanza molto maggiore delle dimensioni base dell'oggetto (Questo implica l'uso del modello proiettivo ortografico);
- definiamo la luminosità dell'oggetto con valori reali in $[0, 1]$ (livelli di grigio), dove 1 corrisponde alla luminosità massima e 0 alla luminosità minima;
- definiamo un modello che descriva la luminosità in ogni punto P dell'oggetto, come percepito dall'osservatore, anche in funzione della sua

posizione relativa rispetto alla sorgente di luce ed alle caratteristiche geometriche della superficie nel punto P .

Per tutti i modelli analizzati viene introdotta una ulteriore semplificazione, supponendo che

- la posizione dell'osservatore sia coincidente con quella della sorgente luminosa ed entrambe siano poste all'infinito e sulla verticale (asse ottico) dell'immagine.

Solo nel caso lambertiano e solo per il metodo globale, in seguito tale semplificazione sarà rimossa.

Questi requisiti possono essere modificati, o integrati per ottenere modelli più complessi, che influenzino il modello di diffusione e riflessione della luce, anche aggiungendo caratteristiche fisiche al materiale del quale è composto l'oggetto.

Per un'immagine definita come punti nel piano e a valori reali in $[0, 1]$ definiamo un sistema di coordinate O_{xyz} in modo tale che il piano O_{xy} coincida con il piano dell'immagine e O_z coincida con l'asse ottico. Nel caso di proiezione ortografica la parte visibile della scena è proporzionale a un grafico $z = u(\mathbf{x})$, con $\mathbf{x} = (x, y)$ punto dell'immagine. In questo modo il modello di luminosità può essere descritto a partire dall'equazione

$$R(\hat{n}(\mathbf{x})) = I(\mathbf{x})$$

dove I è il valore di intensità di grigi misurato nell'immagine, proporzionale alla radianza nel punto \mathbf{x} , e R è la funzione di riflettanza della superficie u nel punto $(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}))$, in funzione della normale alla superficie \hat{n} :

$$\hat{n}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}} \left(-\frac{\partial u}{\partial x}, -\frac{\partial u}{\partial y}, 1 \right).$$

In questo lavoro ci occupiamo di tre modelli di luminosità, o modelli che descrivano il tipo di superficie: il modello di superficie lambertiana, modello a riflessione diffusa, con il quale è possibile definire un superficie generica in modo molto efficiente, quando non se ne conoscano le caratteristiche fisiche; il modello di Oren-Nayar, che introduce un parametro di rugosità della superficie; il modello di Phong che introduce il parametro di lucentezza della superficie e tiene conto dei fenomeni più complessi di diffusione speculare.

1.1 Modello di Lambert

Il modello lambertiano per la diffusione della luce è uno dei modelli più semplici. Quando un elemento dA di una superficie riemette la radiazione

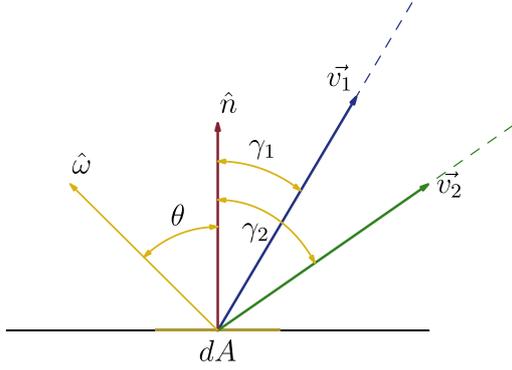


Figura 1.1: Una superficie lambertiana diffonde la radiazione incidente indipendentemente dall'angolo tra la normale alla superficie dA e la direzione dell'osservatore. Due differenti osservatori posti in posizioni differenti (\vec{v}_1 e \vec{v}_2) rispetto alla normale alla superficie non rilevano alcuna differenza di irradianza. L'irradianza è funzione solo dell'angolo θ tra la posizione della sorgente luminosa $\hat{\omega}$ e la normale alla superficie \hat{n} .

ricevuta da una sorgente esterna, l'irradianza, ovvero l'energia riemessa per unità di tempo dall'elemento di superficie, è proporzionale al coseno dell'angolo tra la sorgente di radiazione e la normale alla superficie dell'elemento dA . Una superficie lambertiana diffonde/irradia la radiazione incidente indipendentemente dall'angolo tra la normale alla superficie dA e la direzione dell'osservatore. Osservatori posti in angoli diversi rispetto alla normale alla superficie (fig. 1.1), osservando lo stesso elemento di superficie, non rilevano alcuna differenza di irradianza. L'irradianza è proporzionale a $\cos \theta$, dove θ è l'angolo tra la direzione normale alla superficie e la direzione $\hat{\omega}$ della luce incidente. La frazione di radiazione incidente riflessa è detta albedo ed è un'indicazione del potere riflettente della superficie, che dipende dal materiale e dalla radiazione incidente. L'albedo varia in $[0, 1]$, una superficie che rifletta tutta la radiazione incidente ha albedo 1, viceversa 0, quando nessuna frazione della luce incidente venga riflessa.

Supposto che vi sia un sola sorgente di luce all'infinito in direzione $\hat{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, per un modello lambertiano con albedo pari a 1

$$I(\mathbf{x}) = \hat{\omega} \cdot \hat{n}(\mathbf{x}),$$

quindi

$$I(\mathbf{x}) = \frac{-(\omega_1, \omega_2) \cdot \nabla u(\mathbf{x}) + \omega_3}{\sqrt{1 + |\nabla u(\mathbf{x})|^2}},$$

ovvero

$$I(\mathbf{x})\sqrt{1 + |\nabla u(\mathbf{x})|^2} + (\omega_1, \omega_2) \cdot \nabla u(\mathbf{x}) - \omega_3 = 0 \quad \text{per } \mathbf{x} \in \Omega \quad (1.1)$$

dove $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ è il dominio di ricostruzione. Tale modello può essere ulteriormente semplificato supponendo la sorgente di luce posta in $\hat{\omega} = (0, 0, 1)$, ovvero nella stessa direzione dell'osservatore. In tal caso l'equazione diventa

$$I(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}}, \quad (1.2)$$

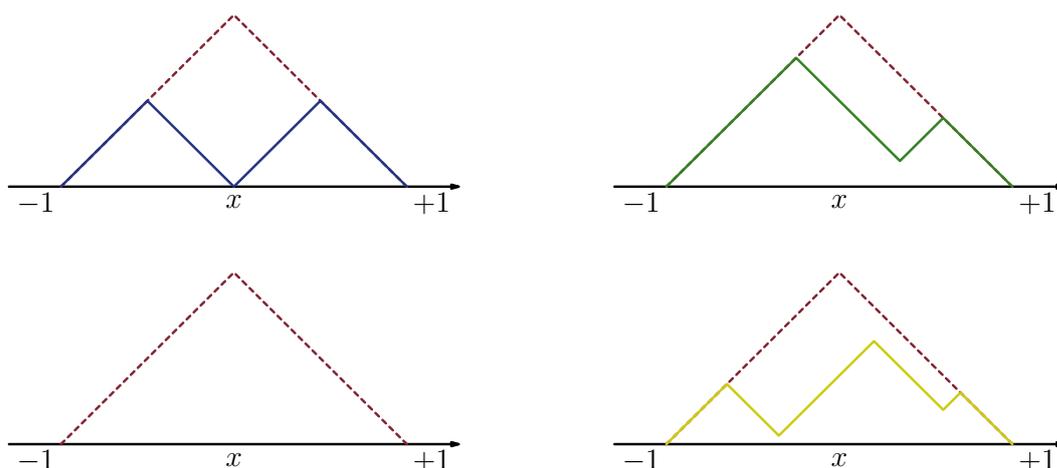


Figura 1.2: Alcune delle possibili soluzioni dell'equazione eiconale (1.5). Le soluzioni sono confrontate con la soluzione massimale, riportata in tratteggiato.

quindi otteniamo la seguente equazione eiconale

$$|\nabla u(\mathbf{x})| = f(\mathbf{x}), \quad f(\mathbf{x}) = \sqrt{\frac{1}{I(\mathbf{x})^2} - 1}.$$

Per ottenere una soluzione unica dall'equazione precedente occorre aggiungere condizioni al bordo, $\partial\Omega$. Tali condizioni, come sarà chiaro in seguito, non sempre sono sufficienti per assicurare l'unicità della soluzione. La scelta può cadere in modo più naturale su una condizione di tipo Dirichlet, la quale risulta più indicata nel caso in cui l'oggetto del quale si vuole ricavare la superficie, sia ripreso nell'immagine su uno sfondo piatto, dove possiamo imporre la condizione $u(x) = 0$

$$\begin{cases} |\nabla u| = f(\mathbf{x}) & \text{per } \mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^2 \\ u(\mathbf{x}) = 0 & \text{per } \mathbf{x} \in \partial\Omega; \end{cases} \quad (1.3)$$

oppure, quando il bordo dell'oggetto sia noto e sia possibile imporre la condizione $u(x) = g(x)$

$$\begin{cases} |\nabla u| = f(\mathbf{x}) & \text{per } \mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^2 \\ u(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) & \text{per } \mathbf{x} \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.4)$$

Ciò significa che data la funzione $f(\mathbf{x})$, la $u(\mathbf{x})$ è soluzione dell'equazione eiconale (1.4).

1.1.1 Soluzioni classiche e soluzioni di viscosità

L'equazione (1.4) non è ben definita. Per comprendere meglio i problemi legati a questa equazione consideriamone un caso particolare:

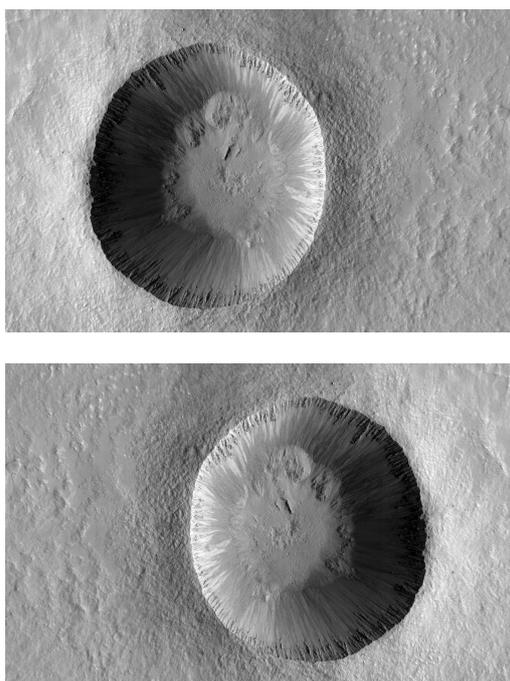


Figura 1.3: Cratere Zuma, Marte. La stessa immagine con una opportuna rotazione risulta ambigua, dando l'impressione di poter essere sia un cratere che una montagna. Tale ambiguità è implicita nello stesso meccanismo della visione, dove la percezione delle forme è un'operazione che presuppone alcuni prerequisiti, ad esempio l'esistenza di un'unica sorgente luminosa o l'assenza di profili nascosti degli oggetti per distinguerli dallo sfondo. Nel caso di queste due immagini, viste contemporaneamente, il meccanismo di visione, non potendo interpretarle entrambe con la presenza di una sola sorgente luminosa, non riesce a giustificarle, se non adottando un differente criterio di concavità/convessità, senza che nessuna delle due appaia meno naturale dell'altra.

supponiamo che $\Omega = (-1, 1) \subset \mathbb{R}$, $f(x) = 1$ e

$$\begin{cases} |u'(x)| = 1 & \text{per } x \in (-1, 1) \\ u(x) = 0 & \text{per } x = \pm 1. \end{cases} \quad (1.5)$$

Questa equazione non possiede soluzioni in C^1 . Per il teorema di Rolle, infatti, dovrebbe esistere un punto interno $x_0 \in (-1, 1)$ tale che $u'(x_0) = 0$, ma ciò è in contraddizione con la formulazione del problema. Possiamo, però, cercare soluzioni che siano lipschitziane e soluzioni *q.o.* di (1.5). Anche in questo caso la soluzione non è unica, alcune possibili soluzioni sono mostrate in figura 1.2. La non unicità della soluzione non deve essere solo interpretata come un problema nella costruzione del modello, ma anche come un'ambiguità nel meccanismo stesso di visione. È noto, infatti, che guardando la stessa immagine e presupponendo una diversa posizione della sorgente luminosa, la stessa possa apparirci sia concava che convessa (figura 1.3). Vale la pena di notare che tale ambiguità non può essere sempre risolta, anche con la conoscenza a priori di alcuni dei parametri di formazione dell'immagine, come le posizioni della sorgente luminosa e dell'osservatore [16, 2]. Anche nello stesso meccanismo della visione, la percezione delle forme è un'operazione che presuppone alcuni prerequisiti, ad esempio l'esistenza di un'unica sorgente luminosa, o l'assenza di profili nascosti degli oggetti per distinguerli dallo sfondo [17].

In presenza di ambiguità, si pone il problema di scegliere tra tutte le possibili soluzioni. Osserviamo, innanzitutto, che l'aggiunta di un opportuno termine perturbativo dipendente da ε , con $\varepsilon > 0$, rende il problema

ben posto e permette di trovare un'unica soluzione $u^\varepsilon(x) \in C^2$. Quindi il problema

$$\begin{cases} -\varepsilon(u^\varepsilon(x))'' + |(u^\varepsilon(x))'| = 1 & \text{per } x \in (-1, 1) \\ u^\varepsilon(x) = 0 & \text{per } x = \pm 1, \end{cases} \quad (1.6)$$

che, nel caso particolare $\varepsilon = 0$, è equivalente a (1.5), possiede come unica soluzione la funzione

$$\begin{cases} u^\varepsilon(x) = x + 1 - \varepsilon(e^{x/\varepsilon} - e^{-1/\varepsilon}) & \text{per } x \in [-1, 0] \\ u^\varepsilon(x) = -x + 1 - \varepsilon(e^{-x/\varepsilon} - e^{-1/\varepsilon}) & \text{per } x \in (0, +1], \end{cases}$$

che al limite, per $\varepsilon \rightarrow 0$, diventa $u^0(x) = 1 - |x|$. Tale funzione è una soluzione di viscosità dell'equazione (1.5). Si dimostra che tale soluzione può essere calcolata direttamente senza l'introduzione del parametro di viscosità ε e il passaggio attraverso l'equazione perturbata (1.6).

Consideriamo nuovamente l'equazione (1.4). Questa appartiene alla famiglia di equazioni di Hamilton-Jacobi, la cui forma generale è data da:

$$H(x, u(x), Du(x)) = 0 \quad x \in \Omega, \quad (1.7)$$

dove Ω è un aperto di \mathbb{R}^n e H è una funzione a valori reali definita in $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Tipicamente si assume che l'Hamiltoniana H abbia le seguenti proprietà:

- $H(\cdot, \cdot, \cdot)$ è uniformemente continua;
- $H(x, u, \cdot)$ è convessa;
- $H(x, \cdot, Du(x))$ è monotona.

Per questo tipo di equazioni è possibile dare la definizione delle soluzioni di viscosità.

Definizione Una funzione $u \in BUC(\Omega)$ (lo spazio delle funzioni delimitate e uniformemente continue sull'aperto Ω) è una soluzione di viscosità dell'equazione (1.7) se sono soddisfatte le seguenti condizioni:

- per ogni funzione test $\varphi \in C^1(\Omega)$, se $x_0 \in \Omega$ è un punto di massimo locale per $u - \varphi$ allora:

$$H(x_0, u(x_0), \nabla\varphi(x_0)) \leq 0 \quad (\text{sotto-soluzione di viscosità})$$

- per ogni funzione test $\varphi \in C^1(\Omega)$, se $x_1 \in \Omega$ è un punto di minimo locale per $u - \varphi$ allora:

$$H(x_1, u(x_1), \nabla\varphi(x_1)) \geq 0 \quad (\text{sopra-soluzione di viscosità})$$

Una funzione $u(x) \in C^1$ è una soluzione di viscosità di (1.7) se risulta contemporaneamente sopra-soluzione e sotto-soluzione di viscosità. A ciò aggiungiamo la definizione di soluzione massimale $u(x)$ di (1.7) quale massima sub-soluzione, ovvero tale che

$$w \leq u, \text{ per ogni } w \in S \equiv \{\text{spazio di tutte le sub-soluzioni}\}.$$

Lo sviluppo della teoria delle soluzioni di viscosità per le equazioni del tipo Hamilton-Jacobi sono alla base dell'analisi del problema di SfS [18].

Sono stati proposti diversi algoritmi per calcolare le soluzioni di viscosità. Purtroppo, il problema di Dirichlet relativo, oltre a possedere diverse soluzioni deboli nel senso di viscosità, può possedere, come già accennato, anche varie soluzioni classiche. Si rende necessario, quindi, uno sforzo ulteriore per definire la soluzione preferibile tra tutte quelle possibili. Un approccio è quello di scegliere la soluzione massimale, ed esiste una copiosa letteratura che prova la convergenza di alcuni metodi a tale soluzione [9, 5, 4, 6, 10].

1.1.2 Formulazione del modello

L'equazione (1.4) può essere riscritta come

$$\begin{cases} \max_{\mathbf{a} \in B_2(0,1)} \{-\mathbf{a} \cdot \nabla u\} = f(\mathbf{x}) & \text{per } \mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^2 \\ u(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) & \text{per } \mathbf{x} \in \partial\Omega, \end{cases}$$

basta, infatti, notare che tale massimo si realizza effettivamente con $\bar{\mathbf{a}} \equiv \nabla u / |\nabla u|$. $B_2(0, 1)$ è la palla unitaria di \mathbb{R}^2 . L'equazione dipende solamente da ∇u . Senza perdita di generalità possiamo, dunque, supporre $u \geq 0$ e, con un opportuno cambio di variabile $v(\mathbf{x}) = 1 - \exp(-u(\mathbf{x}))$, l'equazione (1.4) può essere riscritta come

$$\begin{cases} v(\mathbf{x}) + \max_{\mathbf{a} \in B_2(0,1)} \left\{ -\frac{\mathbf{a}}{f(\mathbf{x})} \cdot \nabla v(\mathbf{x}) - 1 \right\} = 0 & \text{per } \mathbf{x} \in \Omega \\ v(\mathbf{x}) = 1 - \exp(g(\mathbf{x})) & \text{per } \mathbf{x} \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.8)$$

Tale equazione, purché $f(x)$ sia non nulla e limitata in Ω , ha un'unica soluzione di viscosità [1].

1.1.3 Modello di Lambert con luce obliqua

Consideriamo il caso più generale in cui la direzione della luce incidente $\hat{\omega}$ non coincida con la direzione dell'osservatore \hat{v} . Con luce obliqua, occorre tener conto delle ombre che la superficie genera nel piano dell'immagine. Per questo motivo dividiamo il supporto dell'immagine Ω in due regioni

$$\Omega_l \equiv \{\mathbf{x} : I(\mathbf{x}) > 0\}, \quad \Omega_s \equiv \{\mathbf{x} : I(\mathbf{x}) = 0\},$$

le quali rappresentano rispettivamente le regioni illuminate ed in ombra. In Ω_l l'equazione è definita, mentre in Ω_s l'assenza di informazione ci impedisce di definire l'equazione per la superficie reale nascosta. Includendo, però, tale regione nell'equazione definibile per Ω_s con la descrizione del piano d'ombra

$$(\omega_1, \omega_2) \cdot \nabla u(\mathbf{x}) - \omega_3 = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega_s,$$

ovvero con l'aggiunta di un piano che separi le regioni illuminate dalle regioni d'ombra, un piano avente la direzione di $\hat{\omega}$, e notando che tale equazione è equivalente a (1.1) per $I(\mathbf{x}) = 0$, possiamo includere entrambi i problemi nel seguente problema di Dirichlet

$$\begin{cases} I(\mathbf{x})\sqrt{1 + |\nabla u|^2} + (\tilde{\omega} \cdot \nabla u - \omega_3) = 0 & \text{per } \mathbf{x} \in \Omega \\ u(\mathbf{x}) = 0 & \text{per } \mathbf{x} \in \partial\Omega, \end{cases}$$

dove $\tilde{\omega} = (\omega_1, \omega_2)$. Descrivendo la superficie S come in [10], ossia $S(\mathbf{x}, z) = z - u(\mathbf{x}) = 0$ per $\mathbf{x} \in \Omega$, $z \in \mathbb{R}$ e conseguentemente $\nabla S(\mathbf{x}, z) = (-\nabla u(\mathbf{x}), 1)$, l'equazione diventa

$$\begin{cases} I(\mathbf{x})|\nabla S(\mathbf{x}, z)| - \nabla S(\mathbf{x}, z) \cdot \hat{\omega} = 0 & \text{per } \mathbf{x} \in \Omega \\ u(\mathbf{x}) = 0 & \text{per } \mathbf{x} \in \partial\Omega \end{cases}$$

ed usando l'equivalenza

$$|\nabla S(\mathbf{x}, z)| \equiv \max_{\mathbf{a} \in \partial B_3} \{\mathbf{a} \cdot \nabla S(\mathbf{x}, z)\},$$

otteniamo

$$\max_{\mathbf{a} \in \partial B_3} \{(I(\mathbf{x})a_1 - \omega_1, I(\mathbf{x})a_2 - \omega_2, I(\mathbf{x})a_3) \cdot \nabla S(\mathbf{x}, z)\} = \omega_3.$$

Con la definizione del campo vettoriale

$$b^L(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = \frac{1}{\omega_3} (I(\mathbf{x})a_1 - \omega_1, I(\mathbf{x})a_2 - \omega_2)$$

e con la trasformazione $\mu v(\mathbf{x}) = 1 - e^{-\mu u(\mathbf{x})}$ possiamo scrivere

$$\begin{cases} \mu v(\mathbf{x}) + \max_{\mathbf{a} \in \partial B_3} \{-b^L(\mathbf{x}, \mathbf{a}) \cdot \nabla v(\mathbf{x}) + \frac{I(\mathbf{x})a_3(1-\mu v(\mathbf{x}))}{\omega_3}\} = 1 & \mathbf{x} \in \Omega \\ v(\mathbf{x}) = 0 & \mathbf{x} \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.9)$$

1.2 Modelli non lambertiani

Il modello fisico lambertiano per la riflessione della luce è un modello poco realistico. Alcuni modelli più realistici sul meccanismo di diffusione della

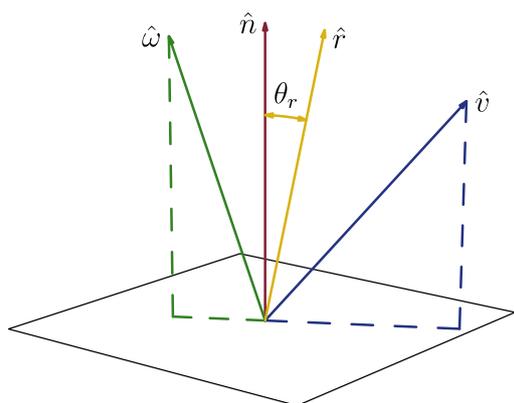


Figura 1.4: Componente speculare. Un semplice modello di riflessione speculare può essere descritto assumendo che i fenomeni riflessivi si verifichino solo nel caso che i vettori $\hat{\omega}$ (direzione della luce incidente), \hat{v} (direzione dell'osservatore) e \hat{n} (normale alla superficie) siano complanari e che la luce riflessa specularmente sia massima quando l'angolo tra il vettore \hat{r} (bisecante dell'angolo formato da $\hat{\omega}$ e \hat{v}) e la normale alla superficie \hat{n} si annulla ($\theta_r = 0$).

luce tengono conto, oltre che delle posizioni relative dell'osservatore e della sorgente di luce rispetto alla normale alla superficie, anche delle caratteristiche fisiche della stessa superficie e della posizione relativa dell'osservatore. In generale un modello per la diffusione della luce quantifica la luce percepita da un osservatore come la somma di tre componenti, una ambientale I_a , una componente di tipo diffusivo I_d ed una componente di tipo speculare I_s :

$$I = I_a + I_d + I_s.$$

La geometria della riflessione (fig. 1.4) può essere descritta in modo piuttosto semplice assumendo che i fenomeni riflessivi si verifichino solo nel caso in cui i vettori $\hat{\omega}$ (direzione della luce incidente), \hat{v} (direzione dell'osservatore) e \hat{n} (normale alla superficie) siano complanari e che la luce riflessa specularmente sia massima quando $\theta_r = 0$ (θ_r è l'angolo tra il vettore \hat{r} , bisecante di $\hat{\omega}$ e \hat{v} , e la normale alla superficie \hat{n}). Un modello così semplice prevede che i fenomeni speculari vengano osservati solo in punti isolati, tuttavia, nella realtà, si osservano caratteristiche speculari in regioni più estese di singoli punti. Quindi ci aspettiamo che un modello in cui si considerino riflessioni speculari sia più complesso.

1.2.1 Modello di Oren-Nayar

Per molti oggetti reali il modello lambertiano di diffusione della luce risulta molto poco accurato nell'approssimare la riflettanza del materiale. Nel modello lambertiano la riflettanza è indipendente dalle posizioni relative di osservatore e sorgente luminosa. Per una superficie non liscia, invece, la riflettanza aumenta all'approssimarsi della direzione dell'osservatore a quella della luce incidente. Il modello di Oren-Nayar consiste nell'approssimare la superficie dell'oggetto con una superficie variabile, non liscia, composta da microcavità lambertiane, e nell'esprimere il risultato totale di riflettanza con una funzione statistica opportunamente parametrizzata [14]. La complessità del modello non lo rende opportuno per l'utilizzo diretto per il problema

di *SfS*, per cui se ne utilizza una versione semplificata, la quale risulta alquanto efficace per approssimare alcune superfici non lisce. La rugosità è rappresentata da superfici con cavità lisce e simmetriche di tipo lambertiano e con un'inclinazione che segue una distribuzione gaussiana di media $\mu = 0$ e deviazione standard σ , che quindi assume il significato di parametro di rugosità.

Se la direzione della luce non è simmetrica rispetto all'asse di tali cavità (che corrisponde alla normale della superficie), le due facce vengono illuminate in modo diverso. Un osservatore percepisce l'illuminazione totale della superficie come somma delle illuminazioni delle facce a lui visibili. Ne consegue che un osservatore, che si trovi in una direzione prossima a quella della luce incidente, vedrà una porzione di facce illuminate molto più di quanto non veda quelle in ombra o scarsamente illuminate, percependo un'illuminazione maggiore di quanto rileverebbe con una superficie liscia. L'esito è esattamente l'opposto allontanandosi dalla direzione della luce incidente.

Per definire il modello [14, 13], descriviamo un generico versore nel sistema di riferimento locale con gli angoli (θ, ϕ) (angoli rispetto a \hat{n} normale alla superficie nel generico punto P , e rispetto a una direzione \vec{x} nel piano definito dalla normale). Dati \hat{v} e $\hat{\omega}$, i versori che definiscono nello spazio la posizione, rispettivamente, dell'osservatore e della sorgente di luce, descriviamo \hat{v} , e $\hat{\omega}$ con le coppie (θ_v, ϕ_v) e $(\theta_\omega, \phi_\omega)$, come mostrato in figura 1.5. Con queste convenzioni il modello di Oren-Nayer può essere descritto con

$$I_t(\mathbf{x}) = I_a + I_i \cos \theta_\omega (A + B M \sin \alpha \tan \beta) \quad (1.10)$$

dove I_t , I_a e I_i sono rispettivamente intensità totale, ambiente e incidente, i parametri α , β e M sono definiti come

$$\alpha = \max[\theta_v, \theta_\omega],$$

$$\beta = \min[\theta_v, \theta_\omega],$$

$$M = \max[0, \cos(\phi_\omega - \phi_v)]$$

e la dipendenza dal parametro di rugosità σ è espressa tramite i due parametri

$$A = (1 - 0.5) \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + 0.33}, \quad B = 0.45 \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + 0.09}.$$

Nel caso in cui \hat{v} e $\hat{\omega}$ siano coincidenti risulta $\alpha = \beta := \theta$ e $M = 1$. Quindi il modello si semplifica in

$$I_t(\mathbf{x}) = I_a + I_i \cos \theta (A + B \sin \theta \tan \theta), \quad (1.11)$$

ovvero

$$I_t(\mathbf{x}) = I_a + I_i (A \cos \theta + B \sin^2 \theta) = I_a + I_i (A \cos \theta + B (1 - \cos^2 \theta)). \quad (1.12)$$

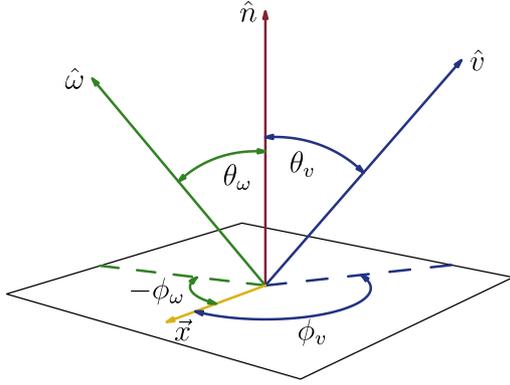


Figura 1.5: Illustrazione del modello diffusivo di Oren-Nayar. θ_ω è l'angolo tra la normale alla superficie \hat{n} e la direzione della luce incidente $\hat{\omega}$, θ_v è l'angolo tra la direzione dell'osservatore \hat{v} e la normale \hat{n} . La luce diffusa in direzione dell'osservatore dipende dagli angoli θ_ω, θ_v , oltre che dagli angoli ϕ_ω e ϕ_v che i vettori $\hat{\omega}$ e \hat{v} disegnano sul piano dell'elemento di superficie.

Inoltre, detta \hat{n} la normale alla superficie nel punto di interesse

$$\hat{n} \cdot \hat{\omega} = \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}}$$

e quindi

$$I_t(\mathbf{x}) = I_a + I_i \left(A \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} + B \frac{|\nabla u|^2}{1 + |\nabla u|^2} \right). \quad (1.13)$$

Da questa equazione, con il seguente cambio di parametri

$$I(\mathbf{x}) = I_t(\mathbf{x}) - I_a, \quad I_A = I_i A, \quad I_B = I_i B,$$

otteniamo

$$I(\mathbf{x}) = I_A \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} + I_B \frac{|\nabla u|^2}{1 + |\nabla u|^2}, \quad (1.14)$$

che possiamo mettere nella forma eiconale $|\nabla u(\mathbf{x})| = f(\mathbf{x})$, risolvendo rispetto a $|\nabla u|^2$, l'equazione corrispondente

$$\left(I(\mathbf{x})(1 + |\nabla u|^2) - I_B |\nabla u|^2 \right)^2 = I_A^2 (1 + |\nabla u|^2),$$

ovvero

$$|\nabla u|^4 (I_B^2 - 2I(\mathbf{x}) I_B + I(\mathbf{x})^2) + |\nabla u|^2 (2I(\mathbf{x})^2 - 2I(\mathbf{x}) I_B - I_A^2) + I(\mathbf{x})^2 - I_A^2 = 0$$

la cui unica soluzione reale e positiva è

$$|\nabla u(\mathbf{x})| = \sqrt{\frac{I_A^2 - 2I(\mathbf{x})(I(\mathbf{x}) - I_B) + \sqrt{Q}}{2(I(\mathbf{x}) - I_B)^2}} \quad (1.15)$$

e dove

$$Q = I_A^2 (4I_B^2 + I_A^2 - 4I_B I(\mathbf{x})). \quad (1.16)$$

Per i limiti di validità di questa equazione si rimanda al paragrafo §1.3 p.13.

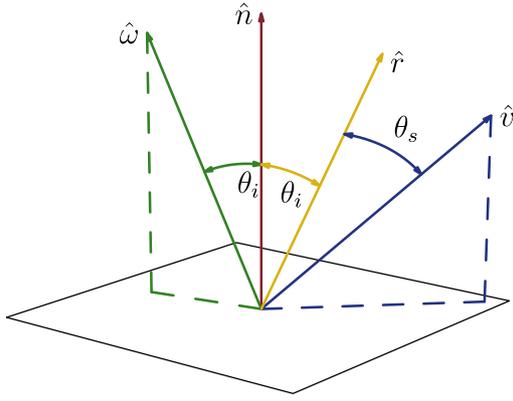


Figura 1.6: Illustrazione del modello di Phong. θ_i è l'angolo tra la normale alla superficie \hat{n} e la direzione della luce incidente $\hat{\omega}$, θ_s è l'angolo tra la direzione dell'osservatore \hat{v} e la direzione \hat{r} della luce perfettamente riflessa. L'intensità di luce in direzione dell'osservatore dipende dagli angoli θ_i, θ_s .

1.2.2 Modello di Phong

Il modello di riflessione di Phong [15] è il più semplice tra i modelli più usati nella Computer Graphics per il rendering delle superfici. Come accennato, la semplificazione consiste nella suddivisione dei contributi radianti dell'intensità luminosa per ogni punto in componente ambientale, diffusiva e speculare:

$$I = I_a + I_d + I_s.$$

La componente speculare, o *highlight*, dipende da una costante tipica del materiale, detta costante di lucentezza α .

Nel caso di una singola sorgente luminosa il valore dell'intensità luminosa in ogni punto \mathbf{x} di una superficie con modello diffusivo di Phong è

$$I(\mathbf{x}) = I_a + I_d \hat{\omega} \cdot \hat{n}(\mathbf{x}) + I_s (\hat{r}(\mathbf{x}) \cdot \hat{v})^\alpha. \quad (1.17)$$

con $\hat{\omega}$ direzione della luce incidente, \hat{n} normale alla superficie nel punto \mathbf{x} , \hat{r} direzione del raggio di luce perfettamente riflesso e \hat{v} direzione dell'osservatore. Se l'osservatore è in una posizione tale che l'angolo (θ_s) tra \hat{r} e \hat{v} è maggiore di 90° ($\cos \theta_s \leq 0$), allora non percepisce alcuna componente riflessa, il termine speculare è nullo e l'equazione rientra nel caso lambertiano.

Per $\cos \theta_s \geq 0$ otteniamo:

$$I = I_a + I_d \cos \theta_i + I_s (\cos \theta_s)^\alpha.$$

Nel caso in cui la sorgente di luce e l'osservatore siano posti all'infinito ed entrambi in direzione dell'asse ottico

$$\cos \theta_i = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}}, \quad (\cos \theta_s)^\alpha = \left(\frac{1 - |\nabla u|^2}{1 + |\nabla u|^2} \right)^\alpha,$$

dove la condizione $\cos \theta_s \geq 0$ diventa $|\nabla u| \leq 1$. Quindi, nel caso di luce

verticale posta all'infinito e proiezione ortografica, l'equazione è:

$$I(\mathbf{x}) = \begin{cases} I_a + I_d \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} + I_s \left(\frac{1-|\nabla u|^2}{1+|\nabla u|^2} \right)^\alpha & \text{per } |\nabla u| \leq 1 \\ I_a + I_d \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} & \text{per } |\nabla u| > 1. \end{cases} \quad (1.18)$$

Per poter essere messo in forma eiconale occorre risolvere l'equazione rispetto a $|\nabla u|^2$. Nel caso particolare $\alpha = 1$ si ottiene

$$|\nabla u| = \sqrt{\frac{I_d^2 - 2I_+I_- + I_d\sqrt{Q}}{2(I - I_a + I_s)^2}}, \quad (1.19)$$

con

$$Q = I_d^2 + 8I_s^2 + 8(I - I_a)I_s \quad (1.20)$$

e

$$I_+ = I - I_a + I_s, \quad I_- = I - I_a - I_s. \quad (1.21)$$

Per il caso generico $\alpha \neq 1$ purtroppo non è facile ottenere l'equazione in una forma eiconale. Per questo motivo, al caso generico saranno applicati solo alcuni dei metodi numerici esaminati più avanti e si renderà necessario utilizzare l'equazione nella sua forma esplicita (1.18).

1.3 Analisi dei parametri dei modelli

Nel caso luce verticale $\hat{\omega} = (0, 0, 1)$, per tutti i modelli considerati abbiamo ottenuto un'espressione di dipendenza esplicita dell'intensità totale $I(\mathbf{x})$ nel punto di coordinate $\mathbf{x} = (x, y)$ rispetto al modulo del gradiente della superficie $|\nabla u|$, ovvero le equazioni (1.2) per il modello di Lambert, (1.14) per Oren-Nayar e (1.18) per Phong.

Per utilizzare i modelli, per i quali abbiamo richiesto $I(\mathbf{x}) \in [0, 1]$, occorre controllare che tale ipotesi sia soddisfatta anche in funzione dei parametri σ , per Oren-Nayar e α e I_s per Phong¹.

1.3.1 Modello di Lambert

Con la convenzione $p = |\nabla u|$, nel caso lambertiano

$$\frac{\partial I}{\partial p} = -\frac{p}{2(p^2 + 1)^{\frac{3}{2}}},$$

I è monotona rispetto a $|\nabla u|$, ha valore massimo $I = 1$ in $p = 0$ e $I \rightarrow 0$ nel limite $p \rightarrow \infty$. Il modello è, quindi, adeguato per essere utilizzato senza variazioni per la ricostruzione di immagini reali e sintetiche a valori in $[0, 1]$.

¹In questa analisi trascuriamo il contributo di luce ambientale per i tre modelli ($I_a \equiv 0$). Per il modello di Phong utilizziamo la relazione $I_d + I_s = 1$, riducendo il numero di parametri e legando I_d a I_s con la relazione $I_d = (1 - I_s)$.

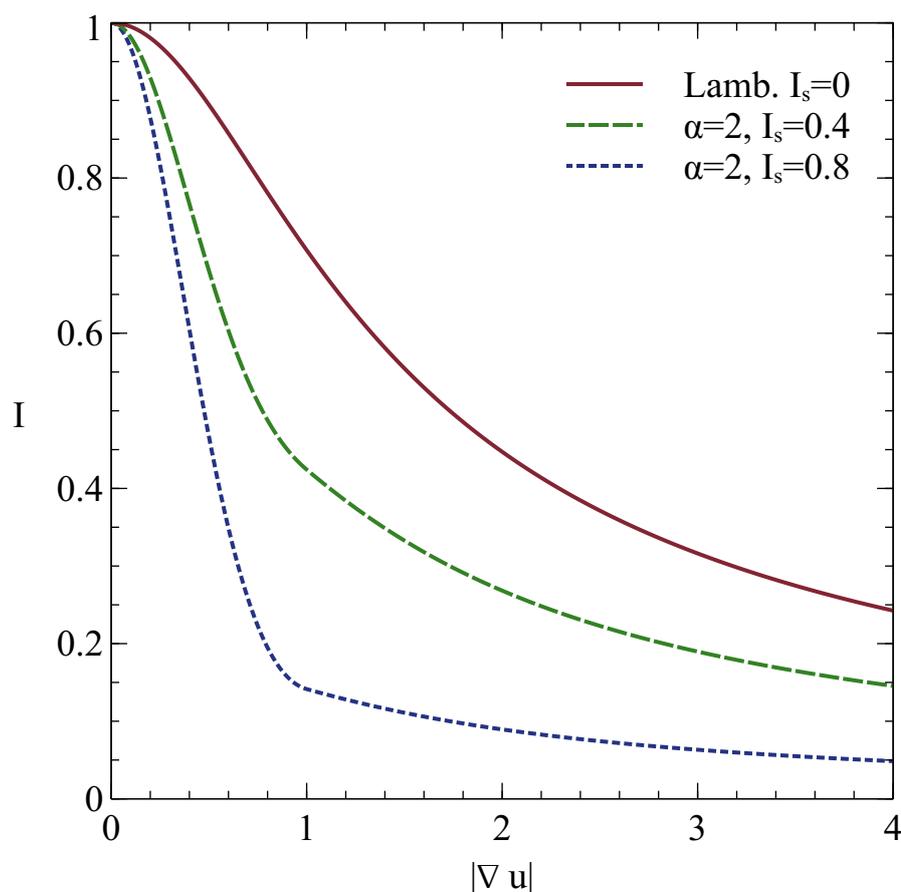


Figura 1.7: Nel modello di Phong, che nel caso $I_s = 0$ coincide con quello di Lambert, il valore del parametro I_s non pregiudica la monotonia di I rispetto a $|\nabla u|$ e qualunque sia il valore di I_s e α , I ha sempre valori in $[0, 1]$.

1.3.2 Modello di Phong

Nel caso del modello di Phong (figura 1.7), la dipendenza da α è definita solo per $p \leq 1$, e per tali valori

$$\frac{\partial I}{\partial \alpha} = I_s \left(\frac{1-p^2}{1+p^2} \right)^\alpha \log \left(\frac{1-p^2}{1+p^2} \right)$$

è una quantità negativa. L'intensità dei grigi dell'immagine, in funzione del parametro α , risulta monotona per $p \leq 1$ ed è costante per $p > 1$. Per la dipendenza da I_s otteniamo

$$\frac{\partial I}{\partial I_s} = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{p^2+1}} & p > 1 \\ \left(\frac{1-p^2}{1+p^2} \right)^\alpha - \frac{1}{\sqrt{p^2+1}} & p \leq 1, \end{cases}$$

dalla quale ricaviamo che l'intensità è ovviamente monotona per $p > 1$. Per $p \leq 1$, essendo il termine in parentesi una quantità minore di 1, deduciamo

che decresce al crescere di α , infine notando che per $\alpha = 1$

$$\left(\frac{1-p^2}{1+p^2} \right) - \frac{1}{\sqrt{p^2+1}} \leq 0,$$

concludiamo che l'intensità risulta monotona non crescente anche in funzione del parametro I_s .

Inoltre, essendo

$$\frac{\partial I}{\partial p} = \begin{cases} -\frac{(1-I_s)p}{(p^2+1)^{\frac{3}{2}}} & p > 1 \\ -\frac{(p^2+1)^{-\alpha-\frac{1}{2}} \left(4\alpha I_s p (1-p^2)^\alpha \sqrt{p^2+1} + (p^2+1)^\alpha ((I_s-1)p^3 + (1-I_s)p) \right)}{1-p^4} & p \leq 1, \end{cases}$$

possiamo verificare che I risulta monotona anche in p , infatti, la quantità $(I_s - 1)p^3 + (1 - I_s)p$ è sempre non negativa per $p \leq 1$ e quindi l'intero numeratore risulta sempre non positivo.

Per quanto riguarda la forma eiconale di questo modello, consideriamo l'equazione (1.20) e riscriviamola come

$$Q = (1 - I_s)^2 + 8I_s^2 + 8I_s I,$$

e considerando che $1 - I_s \geq I - I_s$ possiamo scrivere

$$\begin{aligned} Q &\geq (I - I_s)^2 + 8I_s^2 + 8I_s I, \\ Q &\geq I^2 - 2I_s I + I_s^2 + 8I_s^2 + 8I_s I, \\ Q &\geq I^2 + 6I_s I + 9I_s^2, \end{aligned}$$

ottenendo la seguente disuguaglianza

$$Q \geq (I + 3I_s)^2.$$

Grazie a questo risultato e ricordando ancora una volta che $1 - I_s \geq I - I_s$, possiamo scrivere per il numeratore della (1.19),

$$\begin{aligned} I_d^2 - 2I_+ I_- + I_d \sqrt{Q} &\geq \\ (1 - I_s)^2 - 2(I - I_s)(I + I_s) + (1 - I_s)(I + 3I_s) &\geq \\ (I - I_s)^2 - 2(I - I_s)(I + I_s) + (I - I_s)(I + 3I_s) &= \\ (I - I_s) [I - I_s - 2I - 2I_s + I + 3I_s] &= 0, \end{aligned}$$

deducendo che l'espressione della f per l'equazione eiconale ricavata dal modello di Phong (1.19) risulta sempre definita e a valori reali. Quindi, anche per il modello di Phong, possiamo concludere che risulta adeguato per essere utilizzato senza variazioni per la ricostruzione di immagini reali e sintetiche a valori in $[0, 1]$.

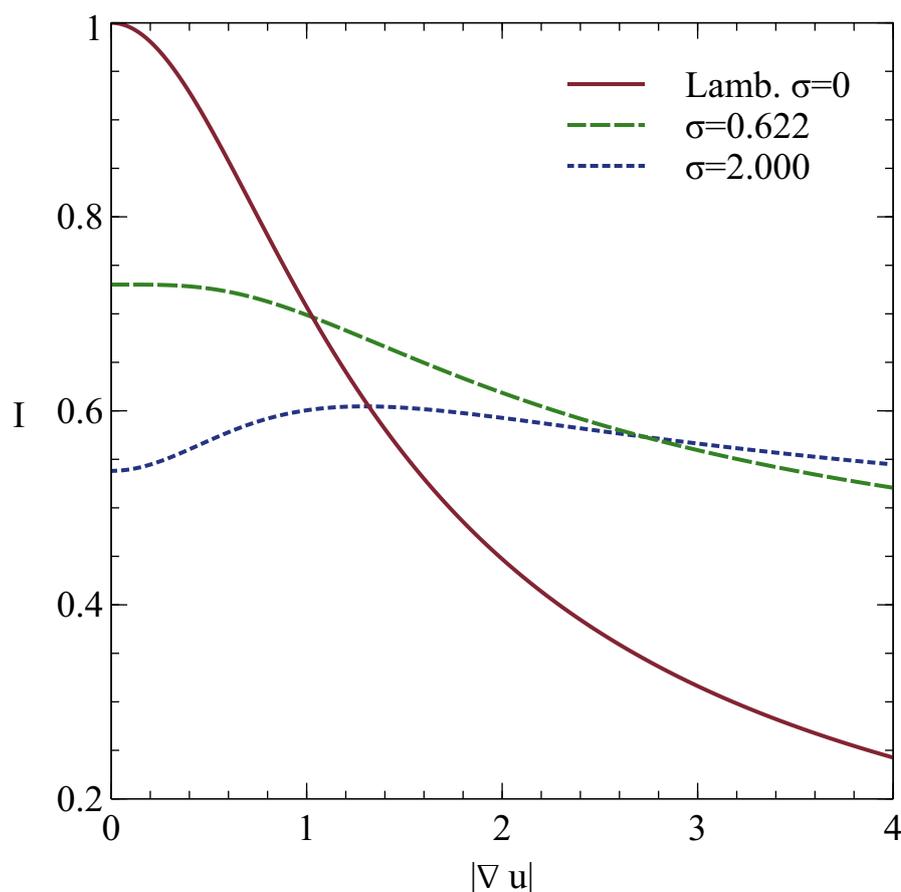


Figura 1.8: Nel modello di Oren-Nayar, che nel caso $\sigma = 0$ coincide con quello di Lambert, il valore del parametro σ pregiudica la monotonia di I rispetto a $|\nabla u|$. I risulta monotona non crescente per valori di σ nell'intervallo $[0, 0.622]$. In tale intervallo di valori I risulta sempre compresa tra $[0, I_i A]$.

1.3.3 Modello di Oren-Nayar

Per quanto riguarda il modello di Oren-Nayar (figura 1.8), la dipendenza da p (per semplicità utilizziamo la semplificazione $I_i = 1$), può essere evidenziata con

$$\frac{\partial I}{\partial p} = \frac{2p\sqrt{p^2+1}B + (-p^3 - p)A}{\sqrt{p^2+1}},$$

e l'equazione $\partial I/\partial p = 0$ descrive due punti stazionari, ovvero $p_0 = 0$ e

$$p_1 = \sqrt{\frac{4B^2 - A^2}{A^2}}.$$

Quindi, per valori di $p_1 \in \mathbb{C}$ (che corrisponde a un solo punto stazionario $p_0 = 0$), il modello di Oren-Nayar risulta monotono in p , con

$$I_{max} = I(\mathbf{x})|_{p=0} = A.$$

Per $p_1 \in \mathbb{R} > 0$, il modello non è più monotono e non può più essere usato.

Per stimare il valore di σ per il quale il modello non risulta più monotono in p , consideriamo che il valore di p_1 cresce al crescere di σ e che il punto stazionario p_1 è un massimo. Infatti, in questo caso $p_1 > p_0$ e il modello al limite di $p \rightarrow \infty$ assume il valore B , valore sempre inferiore al valore A che il modello assume per $p = p_0$. Se ne deduce necessariamente che, per valori reali e positivi di p_1 , in p_0 vi è un minimo locale e in p_1 un massimo assoluto.

Quindi, fino ad un dato valore σ^* (valore per il quale $p_1 = p_0 = 0$), l'intensità I è ancora monotona in p . Dalla relazione

$$I(\mathbf{x})|_{p_1} = I(\mathbf{x})|_{p_0} = A$$

otteniamo

$$\frac{4B^2 + A^2}{4B} = A,$$

ovvero

$$(2B - A)^2 = 0,$$

che ci permette di ricavare $\sigma^* \approx 0.622$ come valore massimo del parametro di rugosità del modello. Tale risultato coincide con quanto riportato in [13] in un'analisi di validità del modello per l'applicabilità del metodo FM con il criterio di Osher.

Il modello di Oren-Nayar deve essere, quindi, corretto per immagini reali con l'aggiunta del termine I_k/A , dove $I_k = \max\{I(\mathbf{x})\}$.

Il modello utilizzato è quindi

$$I(\mathbf{x}) = \frac{I_k}{A} I_i \left(A \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} + B \frac{|\nabla u|^2}{1 + |\nabla u|^2} \right). \quad (1.22)$$

Per quanto riguarda la forma eiconale di questo modello, consideriamo l'equazione (1.16) e riscriviamola come

$$Q = \tilde{I}_A^2 (4\tilde{I}_B^2 + \tilde{I}_A^2 - 4\tilde{I}_B I(\mathbf{x})),$$

dove

$$\tilde{I}_A = I_k I_i \quad \text{e} \quad \tilde{I}_B = \frac{I_k I_i B}{A}, \quad (1.23)$$

possiamo allora scrivere

$$Q \geq \tilde{I}_A^2 (4\tilde{I}_B^2 + \tilde{I}_A^2 - 4\tilde{I}_B \tilde{I}_A),$$

$$Q \geq \tilde{I}_A^2 (2\tilde{I}_B - \tilde{I}_A)^2 \geq 0.$$

Utilizzando questa maggiorazione al numeratore della (1.15) otteniamo

$$\tilde{I}_A^2 - 2\tilde{I}_A(\tilde{I}_A - \tilde{I}_B) + \tilde{I}_A |2\tilde{I}_B - \tilde{I}_A|,$$

ovvero,

$$\begin{cases} \tilde{I}_A(2\tilde{I}_B - \tilde{I}_A) > 0 & \text{per } 2\tilde{I}_B > \tilde{I}_A \\ 0 & \text{per } 2\tilde{I}_B \leq \tilde{I}_A, \end{cases}$$

che ci assicura che la (1.15) abbia sempre valori reali e positivi con la sostituzione (1.23) e per valori di $\sigma \leq 0.622$. Con questi accorgimenti anche il modello di Oren-Nayar risulta adeguato per essere utilizzato per la ricostruzione di immagini reali e sintetiche a valori in $[0, 1]$.

Capitolo 2

Metodi globali per i modelli di Sfs

Definiamo gli schemi numerici globali utilizzati durante questo lavoro, ovvero lo schema semilagrangiano per i modelli di Lambert, Oren-Nayar e Phong e le caratteristiche generali del metodo semilagrangiano utilizzato.

2.1 Modello di Lambert

2.1.1 Schema semilagrangiano

Consideriamo l'equazione (1.8), supponiamo che l'insieme Ω , dominio di ricostruzione, sia tutto contenuto nell'immagine rettangolare e che sull'immagine sia definita una griglia discreta G ($n \times m$) di punti $\{x_{ij}\}$ con $i, j \in \mathbb{Z}$. Definiamo G_{in} l'insieme dei punti della griglia appartenenti a Ω e con G_{out} l'insieme $G \setminus G_{in}$

$$\begin{cases} w(x_{ij}) = \min_{\mathbf{a} \in B_2(0,1)} \left\{ e^{-h} w(x_{ij} + h \frac{\mathbf{a}}{f(\mathbf{x})}) \right\} + 1 - e^{-h} & \text{per } i, j \in G_{in} \\ w(x_{ij}) = 1 - \exp(-g(x_{ij})) & \text{per } i, j \in G_{out}. \end{cases} \quad (2.1)$$

Lo schema appena descritto non è completamente discreto. Infatti $x_{ij} + h \mathbf{a}/f(\mathbf{x})$ non appartiene in generale alla griglia. I valori di $w(x_{ij} + h \mathbf{a}/f(\mathbf{x}))$ vanno cercati per interpolazione. Cerchiamo, quindi, soluzioni $w(x_{ij})$ nello spazio delle approssimazioni lineari sui punti della griglia.

Schema di punto fisso

Indicando con V la matrice contenente i valori di $w(x_{ij})$ possiamo riscrivere l'equazione come

$$V = T(V), \quad T: \mathbb{R}^{n \times m} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m},$$

la quale possiede una soluzione sotto forma di punto fisso

$$V^{k+1} = T(V^k).$$

Inoltre possiamo descrivere genericamente il valore interpolato come $\Lambda(V)$ e l'operatore T come l'operatore

$$T(V) = \min\{e^{-h}\Lambda(V)\} + 1 - e^{-h}.$$

Tale schema è una procedura di punto fisso, durante la quale si cerca la matrice V^* tale che

$$V^* = T(V^*).$$

Ovvero la soluzione viene calcolata per iterazioni successive, ricalcolando una nuova matrice V^{k+1} applicando l'operatore T alla matrice precedente V^k . Infatti la monotonia di T implica che se si parte da una sub-soluzione V^0 la sequenza possa convergere come punto fisso. Va notato che la presenza di punti singolari rende illimitato il campo $a/f(\mathbf{x})$. Per ovviare a questa difficoltà, il minimo di $f(\mathbf{x})$ viene troncato ad un valore ε , ovvero $f(x_{ij})$ viene approssimata con

$$f_\varepsilon(x_{ij}) = \max\{f(x_{ij}), \varepsilon\}.$$

Anche con l'introduzione di questa perturbazione la soluzione converge al problema non perturbato nel limite di ε tendente a 0. La condizione per la convergenza [8] alla soluzione massimale è data da

$$h \left| \frac{1}{f_\varepsilon} \right|_\infty \leq \delta. \quad (2.2)$$

Il criterio di arresto

Nei metodi iterativi, il metodo termina quando si è raggiunta la tolleranza richiesta, oppure è stato superato il numero massimo di iterazioni definito. In un metodo iterativo di punto fisso, il punto si intende raggiunto quando

$$\|V^{n+1} - V^n\| \leq \eta,$$

per una qualche norma opportuna e un fattore di tolleranza η .

2.1.2 Derivata della superficie

Ricordando quanto detto in §1 p.1, i valori di grigi, ovvero la radianza di un'immagine, dipendono dalla normale nel punto. Il nostro dominio di ricostruzione è un dominio discreto, si pone, allora, il problema di definire la normale su tutti i punti della superficie per una griglia discreta. Seguendo quanto fatto in [8], per ogni punto della griglia x_{ij} , consideriamo i quattro triangoli T_k formati dal punto con i prossimi vicini della griglia. Per ognuno dei T_k è possibile calcolare la normale \hat{n}_k ed il gradiente. Inoltre, sempre per

ogni T_k , è possibile calcolare il livello di grigi $I_k = \hat{n}_k \cdot \hat{\omega}$ e successivamente definire

$$I(x_{ij}) = \min\{I_1, I_2, I_3, I_4\}.$$

Coerentemente con quanto fatto per l'intensità di grigi possiamo scegliere come valore della derivata nel punto il valore della derivata del triangolo T_k massima in valore assoluto. In questo modo otteniamo sempre una stima coerente per le tre quantità I , \hat{n} e ∇u intimamente collegate dal modello (1.1) e dai modelli più complessi. Per ogni punto della griglia x_{ij} siano $u(x_{ij})$ i valori nel punto, definiamo la derivata $u_x(x_{i,j})$ come

$$u_x^r(x_{ij}) = (u(x_{i,j+1}) - u(x_{i,j})) \quad (2.3)$$

$$u_x^l(x_{ij}) = (u(x_{i,j}) - u(x_{i,j-1})) \quad (2.4)$$

e

$$u_x(x_{ij}) = \begin{cases} u_x^r(x_{ij}) & |u_x^r| > |u_x^l| \\ u_x^l(x_{ij}) & |u_x^r| \leq |u_x^l| \end{cases}$$

con l'accortezza di utilizzare per i valori al bordo della griglia, solo le espressioni tra la (2.3) e (2.4) che risultano definite. Allo stesso modo procediamo per calcolare il valore di $u_y(x_{i,j})$.

2.1.3 Modello lambertiano con luce obliqua

Con gli stessi presupposti del caso con luce verticale, per l'equazione (1.9), supponendo che l'insieme Ω , sia tutto contenuto nell'immagine rettangolare, e che su tale immagine sia definita una griglia discreta G ($n \times m$) di punti $\{x_{ij}\}$ con $i, j \in \mathbb{Z}$, definiamo G_{in} l'insieme dei punti della griglia appartenenti a Ω e con G_{out} l'insieme $G \setminus G_{in}$. Anche in questo caso cerchiamo soluzioni $w(x_{ij})$ nello spazio delle approssimazioni lineari sui punti della griglia. Con queste definizioni lo schema discreto completo di (1.9) è

$$\begin{cases} w(x_{ij}) = \min_{\mathbf{a} \in \partial B_3} \left\{ e^{-\mu h} w(x_{ij} + b^L(x_{ij}, \mathbf{a}) h) \right. \\ \quad \left. - \tau \frac{I(x_{ij})a_3}{\omega_3} (1 - \mu w(x_{ij})) \right\} + \tau & \text{per } i, j \in G_{in} \\ w(x_{ij}) = 0 & \text{per } i, j \in G_{out}. \end{cases} \quad (2.5)$$

dove x_i sono nodi della griglia e $\tau = (1 - e^{-\mu h})/\mu$. L'operatore

$$T(u)(x_{ij}) = \min_{\mathbf{a} \in \partial B_3} \left\{ e^{-\mu h} u(x_{ij} + b^L h) - \tau \frac{I(x_{ij})a_3}{\omega_3} (1 - \mu u(x_{ij})) \right\} + \tau \quad (2.6)$$

è una contrazione [10] per $u \in [0, 1/\mu]$ se

$$I(x_{ij})a_3 < \mu\omega_3. \quad (2.7)$$

Indicando con V la matrice contenente i valori di $w(x_{ij})$ possiamo riscrivere la (2.5) come

$$V = T(V), \quad T: \mathbb{R}^{n \times m} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m},$$

la quale possiede una soluzione sotto forma di punto fisso

$$V^{k+1} = T(V^k).$$

2.2 Ricerca del minimo

Nell'equazione (2.1) e in altre equazioni simili, la ricerca del minimo consiste nella ricerca del minimo valore ottenuto interpolando su una griglia discreta di punti. Il metodo generale è quello di usare il controllo \mathbf{a} per approssimare i valori di $w(x_{ij} + h\mathbf{a})$. Il valore di tali controlli appartiene al dominio di minimizzazione e può essere, come nel nostro caso, limitato ad una scelta opportuna nell'insieme dei vettori unitari. Ovviamente il numero totale di controlli da utilizzare deve essere finito, e la scelta più opportuna dipende, oltre che dalla necessità di mantenere limitato il tempo necessario al calcolo, anche dalla scelta del tipo di interpolazione e dalla necessità di ottenere una migliore approssimazione del minimo. Il metodo generale consiste nel generare tutti i possibili controlli \mathbf{a} , escludendo i controlli che portano il punto fuori dalla griglia, oppure quelli che non soddisfano altri criteri come la condizione di contrazione (2.7) per il modello a luce obliqua, e successivamente scegliere il minimo tra tutti i valori generati dai controlli.

Per le equazioni del tipo (2.1), nel caso di approssimazione lineare [7], è possibile limitarsi al calcolo di un numero limitato di controlli sulla frontiera della palla $\partial B_2(0, 1)$.

2.2.1 Luce verticale

Consideriamo, per semplicità, una griglia cartesiana con $\Delta x = \Delta y = 1$. In tale griglia, per ogni punto x_{ij} consideriamo i quattro triangoli formati dal punto stesso e dai suoi quattro vicini $\{x_{i \pm j}, x_{\pm i j}\}$ (figura 2.2.1). Scegliendo un opportuno sistema di riferimento, tale che il punto (i, j, w_{ij}) coincida con l'origine O , consideriamo i tre vertici del triangolo T_1 , ovvero $\mathbf{O} = (0, 0, 0)$, $\mathbf{A} = (1, 0, A)$, $\mathbf{B} = (0, 1, B)$. L'equazione del piano passante per i tre punti è $z = -(Ax + By)$. Il minimo di w su tale piano si trova sull'intersezione del cilindro di base $h\mathbf{a}$ e il piano stesso. L'equazione del cilindro con asse z e

raggio¹ h è

$$\begin{cases} x &= h \cos \theta \\ y &= h \sin \theta \\ z &= \zeta \end{cases}$$

la sua intersezione con il piano passante per **OAB** è

$$z = -h (A \cos \theta + B \sin \theta),$$

i cui punti stazionari in θ sono dati da

$$\frac{d}{d\theta} \{-h (A \cos \theta + B \sin \theta)\} = 0,$$

ovvero

$$\theta = \arctan B/A,$$

dalla quale, limitandoci al solo triangolo T_1 , essendo

$$\sin(\arctan B/A) = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \cos(\arctan B/A) = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

otteniamo, il punto stazionario

$$z = -h \sqrt{A^2 + B^2}, \quad (2.8)$$

valore da confrontare con i valori agli estremi

$$z = h A, \quad z = h B. \quad (2.9)$$

Il punto stazionario $z = -h \sqrt{A^2 + B^2}$ è effettivamente un punto di minimo in T_1 se B e A sono entrambi minori di 0, ovvero $\theta = \arctan B/A$ è in $(0, \pi/2)$.

In definitiva, per ognuno dei quattro triangoli T_i , calcoliamo i punti $z_1 = -h \sqrt{A^2 + B^2}$, $z_2 = h A$, $z_3 = h B$ ed infine scegliamo il minore tra tutti i valori calcolati. In questo modo, al costo di limitarsi alla sola interpolazione lineare, abbiamo ridotto il numero di controlli necessari a 5. Notiamo che, essendo interessati solo al valore del minimo, e non a dove esso si realizza sulla griglia, possiamo cambiare il problema trasformando opportunamente ognuno dei restanti triangoli, in modo che risulti equivalente a quello appena risolto per il triangolo T_1 . Inoltre, notando che il minimo dato dalla (2.8) si realizza quando A e B sono entrambi negativi, possiamo preventivamente cercare il triangolo con i valori minimi dei vertici ed effettuare il calcolo

¹Interpretando in modo più restrittivo la condizione (2.2), possiamo semplificare ulteriormente il problema richiedendo che $h|1/f_\varepsilon|_\infty \leq \delta/\sqrt{2}$, in modo che l'interpolazione venga sempre effettuata tra i prossimi vicini del punto x_{ij} , ovvero in modo che la circonferenza $\partial B_2(0, h)$, sia sempre contenuta nel rombo avente come vertici i quattro vicini del punto x_{ij} .

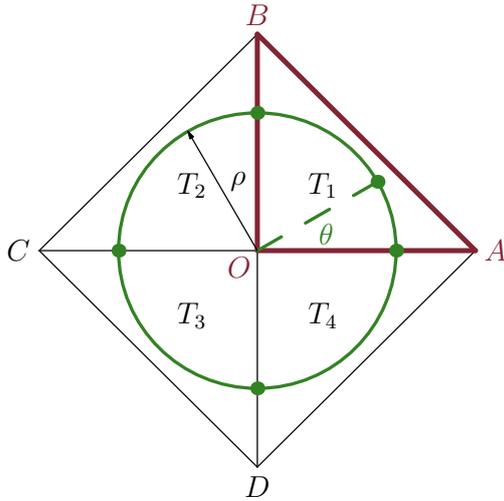


Figura 2.1: Per ogni punto x_{ij} di una griglia cartesiana, possiamo definire un quadrato avente per vertici i quattro prossimi vicini del punto. I quattro triangoli T_i , che costituiscono il quadrato, definiscono dei piani π_i corrispondenti alla funzione che approssima linearmente i punti contenuti nel triangolo. Scegliendo un opportuno sistema di riferimento, tale che il punto (i, j, w_{ij}) coincida con l'origine \mathbf{O} , il minimo di $w(x_{ij} + h \mathbf{a})$, si trova sull'intersezione dei piani definiti dai triangoli T_i con il cilindro di raggio h e centro \mathbf{O} . I 5 punti dove può trovarsi il minimo sono evidenziati con un tratto più marcato.

del minimo solo su questo triangolo con la (2.8) e sulle due intersezioni con gli assi con la (2.9), riducendo di fatto i controlli a un massimo di 3. Reintroducendo i passi della griglia, la soluzione dell'equazione (2.1) per ogni punto della griglia è il valore minimo tra

$$w_{ij} = \beta(-h \sqrt{A^2 + B^2} \sqrt{2}/\delta + w_{ij}) + 1 - \beta,$$

$$w_{ij} = \beta(h A \sqrt{2}/\delta + w_{ij}) + 1 - \beta$$

e

$$w_{ij} = \beta(h B \sqrt{2}/\delta + w_{ij}) + 1 - \beta,$$

dove $\beta = e^{-h}$ e $\delta = \min\{\Delta x, \Delta y\}$. Lo schema in pseudocodice è esposto in dettaglio in algoritmo 1.

2.2.2 Luce obliqua

Anche nell'equazione (2.5) occorre calcolare il valore di w nei punti che non coincidono con i nodi della griglia. Il metodo generale è quello di usare il controllo \mathbf{a} per approssimare i valori di $w(x_{ij} + h \mathbf{a})$. Il valore di tali controlli appartiene al dominio di minimizzazione, è può essere, come nel nostro caso, limitato ad una scelta opportuna nell'insieme dei vettori unitari. Ad esempio possiamo discretizzare la palla $B_3(0, 1)$ ed utilizzare i controlli \mathbf{a} per approssimare i valori w . Anche in questo caso, come nel caso di luce verticale per l'equazione (2.1), è possibile limitarsi al calcolo di un numero limitato di controlli.

Notiamo che h non deve essere scelto globalmente, e che per una opportuna scelta di h , $x_{ij} + h b(x_{ij}, \mathbf{a})$ può essere tutto contenuto nel quadrato²

²O nel rombo avente come vertici i quattro prossimi vicini di x_{ij} , nel caso di griglia cartesiana con differenti passi in x e y .

Algoritmo 1 ricerca del minimo per luce verticale

```

 $x_{ij} \in G_{in}$ 
 $P_1 = w_{i,j+1} - w_{ij}, P_2 = w_{i+1,j} - w_{ij}$ 
 $P_3 = w_{i,j-1} - w_{ij}, P_4 = w_{i-1,j} - w_{ij}$ 
if  $P_1 < P_3$  then
   $A \leftarrow P_1$ 
else
   $A \leftarrow P_3$ 
end if
if  $P_2 < P_4$  then
   $B \leftarrow P_2$ 
else
   $B \leftarrow P_4$ 
end if
if  $B < 0$  and  $A < 0$  then
   $w_{ij} \leftarrow \beta(-h \sqrt{A^2 + B^2} \sqrt{2}/\delta + w_{ij}) + 1 - \beta$ 
else
   $w_{ij} \leftarrow \beta(h \min\{A, B\} \sqrt{2}/\delta + w_{ij}) + 1 - \beta$ 
end if

```

avente come vertici i quattro prossimi vicini di ogni punto della griglia x_{ij} . Per ogni punto x_{ij} , i punti $x_{ij} + h b(x_{ij}, \mathbf{a})$ sono il luogo geometrico della circonferenza di centro $(-k\omega_1, -k\omega_2)$ e raggio $I(x_{ij})k\rho$ dove

$$\rho = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

e $k = h/\omega_3$. La condizione richiesta di contenere tale circonferenza nel rombo formato dai quattro punti della griglia dei vicini di x_{ij} , è soddisfatta per ogni raggio minore uguale al raggio della circonferenza tangente al lato più vicino. Senza perdita di generalità possiamo effettuare il calcolo nel primo quadrante, dove per simmetria il centro della circonferenza è $(k|\omega_1|, k|\omega_2|)$ e l'equazione della retta contenente il lato del quadrato è

$$\frac{x}{\Delta x} + \frac{y}{\Delta y} - 1 = 0.$$

Con queste definizioni (figura 2.2.2) la condizione di tangenza con la circonferenza di raggio massimo $I(x_{ij})k_M$ è

$$\frac{\Delta x \Delta y - k_M |\omega_1| \Delta y - k_M |\omega_2| \Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = I(x_{ij})k_M,$$

quindi

$$k_M = \frac{\Delta x \Delta y}{\sqrt{\Delta y^2 + \Delta x^2} I(x_{ij}) + \Delta x |\omega_2| + \Delta y |\omega_1|}$$

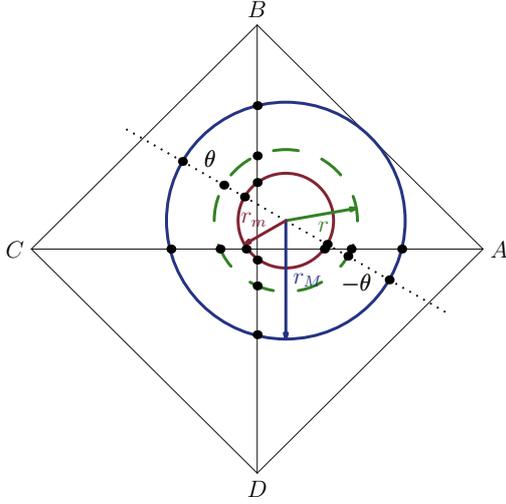


Figura 2.2: Controlli per luce obliqua. Per ogni punto di una griglia cartesiana, possiamo definire il valore massimo di h , tale che $h b$ si trovi interno al rombo avente per vertici i quattro prossimi vicini del punto. Per ognuno dei quattro triangoli che della griglia calcoliamo r_m , r_M , r , θ e $\theta + \pi$, ne calcoliamo i punti interpolati corrispondenti e tra questi scegliamo il minimo. I punti dove può trovarsi il minimo sono evidenziati con un tratto più marcato.

e di conseguenza il raggio è

$$r_M = I(x_{ij}) \frac{\Delta x \Delta y}{\sqrt{\Delta y^2 + \Delta x^2 I(x_{ij}) + \Delta x |\omega_2| + \Delta y |\omega_1|}}$$

La condizione di contrazione (2.6) aggiunge un limite inferiore ad r . Definito $a_3 = \sqrt{1 - \rho^2}$ possiamo scrivere

$$\rho_m = \sqrt{1 - \mu^2 \omega_3^2 / I(x_{ij})^2},$$

quindi³

$$r_m = \frac{\sqrt{I(x_{ij})^2 - \mu^2 \omega_3^2} \Delta x \Delta y}{\sqrt{\Delta y^2 + \Delta x^2 I(x_{ij}) + \Delta x |\omega_2| + \Delta y |\omega_1|}}$$

ed $r \in [r_m, r_M]$.

Infine

$$w(x_{ij}) = \min_{\substack{r \in [r_m, r_M] \\ \theta \in [0, 2\pi]}} \left\{ e^{-\mu h} P(x_{ij}, r, \theta) - \tau Q(x_{ij}, r, \theta) \right\} + \tau$$

dove $P(x_{ij}, r, \theta)$ è l'intersezione del piano $z = -Ax - By + w_{ij}$ (definito in ogni quadrante in modo simile a quanto fatto in §2.2.1 p.22) con il cilindro di raggio r e centro $(-k\omega_1, -k\omega_2)$

$$P(x_{ij}, r, \theta) = -A(r \cos \theta - k\omega_1) + w_{ij} - B(r \sin \theta - k\omega_2) + w_{ij},$$

e dalla condizione

$$\frac{I(x_{ij})}{\omega_3} a_3 = \frac{I(x_{ij})}{\omega_3} \sqrt{1 - \rho^2},$$

³ $\mu\omega_3 > I(x_{ij})$ è una condizione possibile, perché nella condizione di contrazione significa $\sqrt{1 - \rho^2}$ minore di una quantità maggiore di 1, il che è sempre verificato, quindi $\mu\omega_3 > I(x_{ij})$ è equivalente alla condizione $r_m = 0$.

$$Q(x_{ij}, r, \theta) = \frac{1}{\omega_3 k_M} \sqrt{(k_M I(x_{ij}))^2 - r^2(1 - \mu w_{ij})}.$$

Quindi possiamo definire

$$F(x_{ij}, r, \theta) = \beta P(x_{ij}, r, \theta) - \tau Q(x_{ij}, r, \theta)$$

i cui punti stazionari sono in

$$\theta_1 = \arctan(B/A), \quad \theta_2 = \arctan(B/A) + \pi$$

e

$$r = \frac{\beta \sqrt{A^2 + B^2} k_M I(x_{ij})}{\sqrt{\omega_3^2 k_M^2 \beta^2 (A^2 + B^2) + 4\tau^2}} \omega_3 k_M.$$

Ovviamente il minimo va cercato anche agli estremi, ovvero anche per $r = r_m$ ed $r = r_M$, e questi valori vanno confrontati con i valori con i quali i tre cilindri intersecano le diagonali del rombo formato dal punto x_{ij} e dai suoi vicini.

In definitiva: per ognuno dei quattro triangoli T_i calcoliamo r_m, r_M, r, θ_1 e θ_2 , otteniamo i punti interpolati corrispondenti ed infine ne scegliamo il minimo. Va notato che in questo modo, al costo di limitarsi alla sola interpolazione lineare abbiamo ridotto il numero di controlli necessari ad un massimo di 36 (valore limite effettivamente non sempre raggiunto, tenendo conto che alcuni controlli non vanno calcolati nel caso si trovino fuori quadrante). Qualora $I(x_{ij}) = 0$ il minimo coincide con il valore interpolato di w nel punto $(-k\omega_1, -k\omega_2) = (b_1, b_2)$. Una descrizione in pseudocodice del metodo si può trovare in algoritmo 2.

2.3 Modelli non lambertiani

Lo schema semilagrangiano esposto in §2.1.1 p.19 può essere utilizzato senza variazioni per cercare la soluzione delle equazioni definite in forma eiconale (1.15) e (1.19) per i modelli di Oren-Nayar e Phong. Con gli accorgimenti esposti in §1.3.3 p.16 per il modello di Oren-Nayar. Lo schema segue le stesse procedure esposte per il modello lambertiano, compresi gli algoritmi di ricerca dei minimi, le procedure di cut-off di f , la ricerca della soluzione sotto forma di punto fisso e i criteri di stop di quest'ultima.

Algoritmo 2 ricerca del minimo per luce obliqua

 $x_{ij} \in G_{in}, I(x_{ij}) > 0$ $f_\gamma \leftarrow \infty$ calcolo di r_M, r_m, h $b_1 \leftarrow -h\omega_1/\omega_3$ $b_2 \leftarrow -h\omega_2/\omega_3$ **for all** quadranti Q **do** calcolo dei coefficienti A e B del piano calcolo di r, θ **if** $r \in [r_m, r_M]$ **then** **if** $(\pm r \cos \theta, \pm r \sin \theta) \in Q$ **then** $f_\gamma \leftarrow \min\{f_\gamma, F(x_{i,j}, \pm r, \theta)\}$ **end if** **if** $|b_1| < r$ **or** $|b_2| < r$ **then** calcolo di q_r intersezioni con diagonali rombo, $f_\gamma \leftarrow \min(f_\gamma, q)$ **end if** **end if** **if** $(\pm r_m \cos \theta, \pm r_m \sin \theta) \in Q$ **then** $f_\gamma \leftarrow \min(f_\gamma, F(x_{i,j}, \pm r_m, \theta))$ **end if** **if** $|b_1| < r_m$ **or** $|b_2| < r_m$ **then** calcolo di q_{r_m} intersezioni con diagonali rombo, $f_\gamma \leftarrow \min(f_\gamma, q_{r_m})$ **end if** **if** $(\pm r_M \cos \theta, \pm r_M \sin \theta) \in Q$ **then** $f_\gamma \leftarrow \min(f_\gamma, F(x_{i,j}, \pm r_M, \theta))$ **end if** **if** $|b_1| < r_M$ **or** $|b_2| < r_M$ **then** calcolo di q_{r_M} intersezioni con diagonali rombo, $f_\gamma \leftarrow \min(f_\gamma, q_{r_M})$ **end if****end for** $w(x_{ij}) \leftarrow f_\gamma + \tau$

Capitolo 3

Metodi di accelerazione

Fast Marching e Fast Sweeping sono due tra gli algoritmi più diffusi per la soluzione dell'equazione eiconale. Ognuno dei metodi risulta più appropriato per una classe di problemi. Ad esempio, FS risulta più veloce per problemi le cui caratteristiche sono linee rette e costanti, mentre FM risulta più appropriato per problemi le cui caratteristiche sono ampiamente variabili su tutto il dominio di ricostruzione.

La versione discreta dell'equazione eiconale (1.19) può essere costruita usando un'appropriata discretizzazione alle differenze finite. In questo modo otteniamo un sistema di $N = m \times n$ equazioni accoppiate (dove m e n sono le dimensioni del dominio discreto).

La complessità dell'algoritmo per la soluzione di queste equazioni è $O(N^2)$, FS e FM riescono in alcuni casi a ottenere soluzioni in $O(N)$ e $O(N \log N)$.

Entrambi i metodi consistono nel risolvere il sistema discreto disaccoppiando le equazioni, ovvero, risolvendo prima le equazioni non legate causalmente con le successive.

3.1 Metodo Fast Marching

Il metodo Fast Marching [19] è un metodo locale basato su una approssimazione alle differenze finite, che produce un algoritmo molto veloce per la risoluzione numerica di equazioni eiconali anche su domini di ricostruzione non connessi. Anche in questo caso, come nel caso dei metodi globali, supponiamo che l'insieme Ω , sia tutto contenuto nell'immagine rettangolare, e che su tale immagine sia definita una griglia discreta $G (n \times m)$ di punti $\{x_{ij}\}$ con $i, j \in \mathbb{Z}$. Alla base del metodo c'è la suddivisione della griglia in tre insiemi separati: i nodi FAR, sui quali non è stato ancora effettuato alcun calcolo, i nodi ACCEPTED, per i quali si suppone che il valore non verrà più cambiato e i nodi CONSIDERED, o NARROW BAND, per i quali il valore calcolato non è ancora definitivo. Questo metodo è stato introdotto inizialmente

per risolvere problemi di evoluzione dei fronti, dunque, il valore iniziale noto è di solito un valore dato e coincide con il fronte iniziale. Nel nostro caso, il valore iniziale viene impostato con il dato al bordo, ovvero con la condizione $u(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})$ in $\partial\Omega$.

Nel problema di *SfS* i dati delle immagini sono definiti su una griglia discreta, è necessario, quindi, trovare una convenzione adeguata per la definizione delle approssimazioni per le derivate spaziali. Le approssimazioni alle differenze centrali non risultano stabili per le equazioni di tipo iperbolico, per ciò la scelta cade su approssimazioni alle differenze in avanti o all'indietro. Tuttavia, le sole differenze in avanti o all'indietro possono introdurre instabilità quando il verso della derivata non venga seguito. La soluzione giusta per questo tipo di problema è quella di usare una discretizzazione di tipo upwind.

3.1.1 Equazione eiconale

Consideriamo un'equazione del tipo (1.4) e definiamo G_{in} l'insieme dei punti della griglia appartenenti a Ω e G_{out} l'insieme $G \setminus G_{in}$. Definiamo inoltre nodi vicini del nodo $w_{i,j}$ i nodi

$$\text{NEAR}(w_{i,j}) = \{w_{i+1,j}, w_{i-1,j}, w_{i,j+1}, w_{i,j-1}\}.$$

Per semplicità, inoltre, indichiamo con δ il passo della griglia¹.

La versione discreta di (1.4) utilizzata è

$$[(w_{ij} - w_{xm})^+]^2 + [(w_{ij} - w_{ym})^+]^2 = f_{ij}^2 \delta^2 \quad (3.1)$$

dove $w_{xm} = \min\{w_{i-1,j}, w_{i+1,j}\}$, $w_{ym} = \min\{w_{i,j-1}, w_{i,j+1}\}$ e

$$(x)^+ = \begin{cases} x & x > 0 \\ 0 & x \leq 0. \end{cases}$$

Agli estremi del dominio di definizione della griglia possono essere usate delle differenze finite adeguate, ad esempio, in $i = 0$ è possibile usare

$$[(w_{0j} - w_{1j})^+]^2 + [(w_{0j} - w_{ym})^+]^2 = f_{0j}^2 \delta^2. \quad (3.2)$$

In fase di inizializzazione vengono assegnati ai punti della griglia corrispondenti alla condizione al bordo i valori esatti, o interpolati di $u(\mathbf{x}) = 0$ o $u(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})$ e tali nodi vengono marcati come ACCEPTED. I nodi prossimi vicini vengono marcati come CONSIDERED, o come ACCEPTED se appartengono a G_{out} . Tutti gli altri nodi vengono marcati come FAR e ad essi viene assegnato un valore molto alto.

¹Nel caso di griglia cartesiana con passi differenti $\delta = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} / \sqrt{2}$.

Come già detto, il metodo viene utilizzato inizializzando i nodi della griglia. Viene definito un fronte iniziale di nodi il cui valore è stato definitivamente accettato. Successivamente i nodi vicini vengono ricalcolati e confrontati con il valore precedentemente assunto. L'algoritmo procede localmente alla ricerca del minimo, quindi attribuire ad ogni nodo un valore iniziale molto alto consente di semplificare i confronti nei calcoli successivi. Nel dettaglio, le equazioni (3.1) e (3.2), possono essere riscritte in modo più compatto come

$$[(x - a)^+]^2 + [(x - b)^+]^2 = f^2 \delta^2$$

dove $a = w_{xm}$ e $b = w_{ym}$. Tale equazione ha una soluzione unica \bar{x}

$$\bar{x} = \begin{cases} \min\{a, b\} + fh & |a - b| \geq fh \\ \frac{1}{2} \left(a + b + \sqrt{2f^2 h^2 - (a - b)^2} \right) & |a - b| < fh \end{cases} \quad (3.3)$$

Il metodo assegna il valore $g(x)$ ai nodi appartenenti a G_b ed il valore convenzionale 0 agli altri nodi appartenenti a G_{out} . A tutti gli altri nodi della griglia viene assegnato il valore convenzionale ∞ , ovvero il più alto valore positivo possibile². Il metodo è descritto in dettaglio in algoritmo 3 e in figura 3.1.

- Inizializzazione. I punti della griglia vengono marcati come FAR, ACCEPTED e CONSIDERED.
 - I nodi che appartengono a G_{out} vengono marcati come ACCEPTED e gli viene assegnato il valore $w_{ij} = 0$; ai nodi di $G_b \subset G_{out}$ che costituiscono il bordo del dominio di ricostruzione viene dato il valore $w_{ij} = g(x_{ij})$ e vengono assegnati a ACCEPTED. I prossimi vicini dei nodi marcati come ACCEPTED, appartenenti a G_{in} , vengono marcati come CONSIDERED e gli viene assegnato un valore temporaneo calcolato con la (3.3).
 - Ai nodi restanti, marcati come FAR, viene assegnato il valore $w_{ij} = \infty$.
- Ciclo principale.

Fintanto che ci sono punti marcati come CONSIDERED:

 - tra tutti i nodi marcati come CONSIDERED viene scelto il nodo con il minimo valore di w : w_{hk} e marcato come ACCEPTED.
 - tra tutti i nodi prossimi vicini di (h, k) i nodi FAR vengono marcati come CONSIDERED e ricalcolati secondo la (3.3).

²Nello standard IEEE-754 il valore floating point *inf* è un numero che possiede le seguenti proprietà $inf > x$ qualunque sia il valore di x .

Algoritmo 3 Fast Marching

Inizializzazione

```

for all  $x_{ij} \in G$  do
  if  $x_{ij} \in G_{out}$  then
     $x_{ij} \rightarrow$  ACCEPTED
     $V_{ij} \leftarrow 0$ 
    if  $x_{ij} \in G_b$  then
       $V_{ij} \leftarrow g(x_{ij})$ 
    end if
  else
     $x_{ij} \rightarrow$  FAR
     $V_{ij} \leftarrow \infty$ 
  end if
end for
for all  $x_{ij} \in$  ACCEPTED do
  for all  $x_{hk} \in$  NEAR( $x_{ij}$ ) do
    if  $x_{hk} \in$  FAR then
       $x_{hk} \rightarrow$  CONSIDERED
       $V_{hk} \leftarrow \min\{V_{hk}, \text{upwind}(x_{hk})\}$ 
    end if
  end for
end for

```

Esecuzione

```

while CONSIDERED do
   $x_{ij} = \text{argmin}\{V(x_{lm}) | x_{lm} \in$  CONSIDERED $\}$ 
   $x_{ij} \rightarrow$  ACCEPTED
  for all  $x_{hk} \in$  NEAR( $x_{ij}$ ) and  $x_{hk} \notin$  ACCEPTED do
     $V_{hk} \leftarrow \min\{V_{hk}, \text{upwind}(x_{hk})\}$ 
    if  $x_{hk} \in$  FAR then
       $x_{hk} \rightarrow$  CONSIDERED
    end if
  end for
end while

```

Osservazione

L'algoritmo calcola il valore in ogni nodo solo quando uno dei suoi vicini diventa ACCEPTED. Un nodo può diventare ACCEPTED solo una volta, dopo di che esso non viene più preso in considerazione. In una griglia cartesiana ogni nodo ha quattro vicini, quindi ogni nodo può essere ricalcolato al massimo quattro volte. Risulta che la complessità dell'algoritmo è $O(N)$, dove N è il numero di nodi della griglia appartenenti a G_{in} . A questo valore va aggiunto il costo della ricerca del minimo nella lista CONSIDERED. Usando un algoritmo di tipo *Heapsort*, per l'ordinamento della lista CONSIDERED, tale che il minimo si trovi sempre in cima alla lista e l'ordinamento completo venga effettuato in fase di inserimento, possiamo stimare tale costo in $O(\log(N))$, portando il valore totale del costo computazionale a $O(N \log(N))$.

3.1.2 Equazione non in forma eiconale

Per quanto riguarda equazioni non in forma eiconale come la (1.14) e la (1.18), possiamo procedere come fatto per l'equazione eiconale, con la differenza che occorre definire uno schema opportuno, per la ricerca delle soluzioni in ogni punto della griglia, che preservi il legame causale.

Sebbene lo schema upwind venga comunemente utilizzato per hamiltoniane convesse, nel metodo FM anche per hamiltoniane non convesse è possibile utilizzare lo schema upwind, purché l'informazione si propaghi da valori bassi a valori alti [21, 22].

La soluzione iterativa di un generico problema H-J, può essere affrontato introducendo un tempo artificiale τ e impostando il sistema iterativo

$$u^{n+1} = u^n - \tau H(x, u, \nabla u).$$

Rendere discreta questa equazione comporta, oltre alla scelta della discretizzazione delle derivate spaziali, anche la scelta opportuna per la discretizzazione in tempo. La scelta più semplice è quella di uno schema esplicito. In un tale schema tutti i dati necessari per la scrittura del membro destro dell'equazione sarebbero presi completamente dal tempo precedente:

$$u^{n+1} = u^n - \tau H(x, u^n, \nabla u^n).$$

Uno schema alternativo potrebbe essere uno schema completamente implicito:

$$u^{n+1} = u^n - \tau H(x, u^{n+1}, \nabla u^{n+1}).$$

In generale, gli schemi impliciti sono più stabili degli schemi espliciti, ma sono ovviamente più complessi da risolvere. Inoltre è possibile utilizzare uno schema semi-implicito, in cui nell'hamiltoniana compaiano sia termini u^{n+1} che u^n . In uno schema esplicito la soluzione iterativa è semplicemente la soluzione numerica dell'equazione discreta $H(x_{ij}, u^n, \nabla u^n) = 0$. Questo

metodo risulta valido purché l'operatore ∇u^n sia discretizzato in modo consistente sulla griglia [20]. Nel caso in cui nell'espressione di H il gradiente compaia solo elevato al quadrato è possibile utilizzare la discretizzazione

$$u_x \approx \min\{0, u_{i+1,j} - u_{i,j}, u_{i-1,j} - u_{i,j}\}, \quad u_y \approx \min\{0, u_{i,j+1} - u_{i,j}, u_{i,j-1} - u_{i,j}\}.$$

Questa approssimazione per la derivata, però, non risulta corretta per la giusta propagazione causale, nel caso di equazioni in cui il gradiente sia presente anche non elevato al quadrato. In questi casi occorre correggere opportunamente tale espressione, ad esempio con

$$u_x \approx \min\{0, u_{i+1,j} - u_{i,j}, u_{i,j} - u_{i-1,j}\}, \quad u_y \approx \min\{0, u_{i,j+1} - u_{i,j}, u_{i,j} - u_{i,j-1}\}$$

per tenere conto del verso giusto della derivata.

Bisezione e Regula Falsi

Per cercare gli zeri dell'equazione $H(x_{ij}, u^n, \nabla u^n) = 0$ in ogni nodo della griglia, considerando che la derivata possa essere nulla in prossimità dei punti della griglia, non è possibile utilizzare il metodo di Newton[21]. Per ovviare si usa il metodo di bisezione o la sua variante regula-falsi: si parte con due valori u_1 e u_2 tali che $u_1 < u_2$ e con $H(u_1) < 0$ e $H(u_2) > 0$, si sceglie

$$u_3 = \frac{H(u_2)u_2 - H(u_1)u_1}{H(u_2) - H(u_1)}$$

che si trova tra u_1 e u_2 . Se $H(u_3)$ risulta negativo, si effettua lo scambio $u_1 = u_3$, altrimenti si pone $u_2 = u_3$. Ripetendo la regola fino a che u_1 e u_2 non siano sufficientemente vicini tra loro si ottiene una stima della soluzione.

3.2 Metodo Fast Sweeping

L'idea fondamentale del metodo Fast Sweeping [25, 24], è quella di usare una discretizzazione upwind ed iterazioni del tipo Gauss-Siedel con un ordine alternato (sweep). A differenza del metodo Fast Marching, FS segue le caratteristiche eseguendo il calcolo lungo direzioni alternate che privilegiano gruppi specifici di caratteristiche. Tutte le caratteristiche sono divise in un numero finito di gruppi in base alla direzione e ogni iterazione di Gauss-Siedel, eseguita con uno specifico ordine, ne percorre uno gruppo specifico.

Il metodo risulta appropriato per ottenere le soluzioni di viscosità dell'equazione (1.4). Anche in questo caso supponiamo che l'insieme Ω , dominio di ricostruzione, sia tutto contenuto nell'immagine rettangolare e che sull'immagine sia definita una griglia discreta G ($n \times m$) di punti $\{x_{ij}\}$ con $i, j \in \mathbb{Z}$. Definiamo G_{in} l'insieme dei punti della griglia appartenenti a Ω , G_{out} l'insieme $G \setminus G_{in}$ e con $G_b \subset G_{out}$ i punti della griglia appartenenti a $\partial\Omega$.

Per semplicità, inoltre, indichiamo con δ il passo della griglia. Utilizziamo ancora una volta la versione discreta di (1.4)

$$[(w_{ij} - w_{xm})^+]^2 + [(w_{ij} - w_{ym})^+]^2 = f_{ij}^2 \delta^2 \quad (3.4)$$

In fase di inizializzazione vengono assegnati ai punti della griglia corrispondenti alla condizione al bordo i valori esatti, o interpolati di $u(\mathbf{x}) = 0$ o $u(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})$. A tutti gli altri punti della griglia viene assegnato un valore molto alto. Successivamente, i valori di w_{ij} vengono ricalcolati utilizzando la 3.4, alternando l'ordine di calcolo (sweep). Il calcolo viene ripetuto fino al verificarsi della condizione di convergenza.

3.2.1 Equazione eiconale

Come nel caso FM, la (3.4) può essere riscritta in modo più compatto come

$$[(x - a)^+]^2 + [(x - b)^+]^2 = f^2 \delta^2$$

dove $a = w_{xm}$ e $b = w_{ym}$, la cui soluzione unica \bar{x} è data dalla (3.3). Il metodo assegna il valore $g(\mathbf{x})$ ai nodi appartenenti a G_b ed il valore convenzionale 0 agli altri nodi appartenenti a G_{out} . A tutti gli altri nodi della griglia viene assegnato il valore convenzionale ∞ , ovvero il più alto valore positivo possibile. Come, accennato in precedenza, ad ogni sweep il nuovo valore

Algoritmo 4 Sweeping Order

```

n ← d (mod 4)
if n == 0 then
    (i0, i1) ← (0, iM), (j0, j1) ← (0, jM)
end if
if n == 1 then
    (i0, i1) ← (iM, 0), (j0, j1) ← (0, jM)
end if
if n == 2 then
    (i0, i1) ← (iM, 0), (j0, j1) ← (jM, 0)
end if
if n == 3 then
    (i0, i1) ← (0, iM), (j0, j1) ← (jM, 0)
end if

```

ricavato con la (3.3), viene confrontato con il precedente e accettato qualora risultasse minore del valore precedentemente calcolato. Quindi assegnare un valore positivo più alto di qualunque risultato della (3.3) ci permette di poter accettare il valore calcolato nello sweep successivo.

L'ordine di calcolo dei punti della griglia avviene secondo uno sweep diverso alternativamente, iterazione dopo iterazione (supponendo di essere

all'iterazione numero d , l'ordine viene assegnato con il metodo descritto in algoritmo 4). Supponiamo per semplicità che la griglia sia definita con valori di i e j tra 0 e i_M e tra 0 e j_M . Allora i quattro sweep da usare sono

1. $i = 0 \dots i_M, j = 0 \dots j_M,$
2. $i = i_M \dots 0, j = 0 \dots j_M,$
3. $i = i_M \dots 0, j = j_M \dots 0,$
4. $i = 0 \dots i_M, j = j_M \dots 0.$

Una descrizione completa del metodo è descritta in pseudocodice in algoritmo 5.

3.2.2 Equazione non in forma eiconale

Nel caso di equazioni non in forma eiconale, come la (1.14) e la (1.18), valgono le stesse considerazioni e lo stesso metodo utilizzato per FM, ovvero i valori dei nodi vengono calcolati risolvendo l'equazione opportunamente discretizzata sui nodi della griglia. Anche in questo caso occorre definire uno schema opportuno che preservi il legame causale e per hamiltoniane non convesse è possibile utilizzare lo schema upwind. Utilizzando uno schema esplicito la soluzione iterativa è ancora la soluzione numerica dell'equazione discreta $H(x_{ij}, u^n, \nabla u^n) = 0$, con l'operatore ∇u^n discretizzato in modo consistente sulla griglia e con gli zeri calcolati con il metodo di bisezione o regula-falsi.

Algoritmo 5 Fast Sweeping

Inizializzazione

for all punti della griglia $x_{ij} \in G$ **do** **if** $x_{ij} \in G_{out}$ **then** **if** $x_{ij} \in G_b$ **then** $w_{ij} \leftarrow g(x_{ij})$ **end if** $w_{ij} \leftarrow 0$ **else** $w_{ij} \leftarrow \infty$ **end if****end for**

Fine Inizializzazione

Esecuzione

 $d \leftarrow 0$ **repeat** sweaped \leftarrow FALSE $(i_0, i_1)(j_0, j_1) \leftarrow$ Sweeping Order(d) **for** $i = i_0 \dots i_1$ **do** **for** $j = j_0 \dots j_1$ **do** **if** $x_{ij} \in G_{in}$ **then** calcola il valore $(w_{ij})_u$ con l'equazione (3.3) **if** $(w_{ij})_u < w_{ij}$ **then** $w_{ij} \leftarrow (w_{ij})_u$ sweaped \leftarrow TRUE **end if** **end if** **end for** **end for** $d \leftarrow d + 1$ **until** sweaped == TRUE

Capitolo 4

Risultati

Il criterio di scelta delle immagini da utilizzare come test per la valutazione dei metodi e dei modelli non è semplice. È sempre possibile utilizzare immagini sintetiche, che risultano particolarmente appropriate per fornire un criterio di valutazione per i test, ma d'altro canto i test con le immagini sintetiche non risultano completi e vanno integrati con prove effettuate su immagini reali.

4.1 Parametri di valutazione

4.1.1 Definizione della mask e del bordo

Ricordiamo che tutte le immagini definiscono una griglia discreta di nodi (i, j) corrispondenti ai pixel. Nella definizione di ciascun metodo, tale insieme è stato indicato con G . Inoltre abbiamo indicato con G_{in} l'insieme dei punti x_{ij} di Ω . L'insieme $G \setminus G_{in}$ è indicato come G_{out} . Il bordo $\partial\Omega$ viene definito come l'insieme dei punti $G_b \subset G_{out}$ tali che almeno uno dei punti prossimi vicini appartenga a G_{in} . Per ogni immagine viene definita una mappa di tali punti, detta mask, o silhouette. Tale mappa è in effetti un'immagine nella quale i punti corrispondenti a G_{in} sono colorati in bianco e quelli corrispondenti a G_{out} in nero. Durante l'applicazione del metodo, la silhouette ci permette di distinguere facilmente i nodi da utilizzare per la ricostruzione (i nodi del supporto Ω) e i nodi del bordo ($\partial\Omega$).

4.1.2 Immagini sintetiche

Uno dei criteri per testare metodi e modelli per di SfS è quello di generare immagini sintetiche da superfici la cui forma analitica sia nota, per le quali sia possibile calcolarne il gradiente ed applicare uno dei modelli precedentemente esaminati. In questo modo, per ogni metodo adottato, è possibile confrontare numericamente la superficie ricostruita con quella di partenza

ed ottenere un riscontro quantitativo per la validità del metodo. Tutte le immagini sintetiche sono state definite nello stesso dominio G , ovvero un rettangolo contenente il supporto dell'immagine Ω , $G \equiv [-1, 1] \times [-1, 1]$.

In generale, per le immagini sintetiche è possibile variare il numero di pixel totali. Ciò corrisponde a definire valori diversi per la dimensione della griglia δ o, per la precisione, Δx e Δy . Se non sottolineato diversamente, tutte le immagini sintetiche hanno dimensione 256×256 . Per tutte è possibile definire, qualora risulti utile, la funzione $g(\mathbf{x})$, ovvero il bordo dell'oggetto. X e Y rappresentano la dimensione reale (per $G \equiv [-1, 1] \times [-1, 1]$, $X = 2, Y = 2$).

Calotta sferica

La calotta sferica (figura 4.1) è definita su $G_{in} : \{(x, y) | r^2 < x^2 + y^2\}$, con

$$\begin{cases} u(x, y) = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} & (x, y) \in G_{in} \\ u(x, y) = 0 & (x, y) \in G_{out}, \end{cases}$$

dove

$$r = \frac{\min\{X, Y\}}{2} + 2\tilde{\delta},$$

e $\tilde{\delta} = \max\{\Delta x, \Delta y\}$.

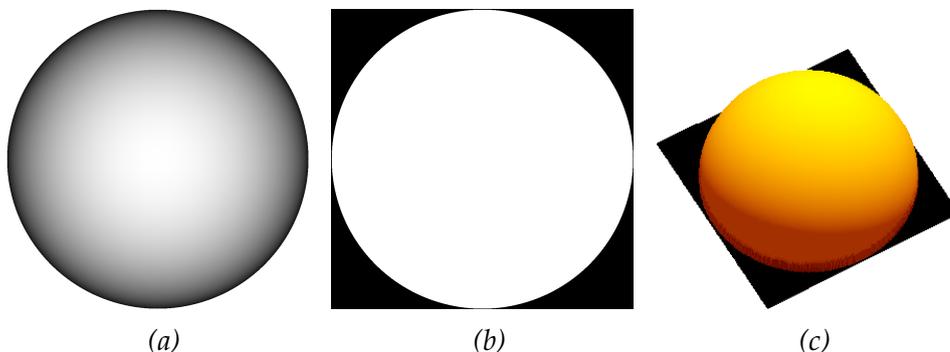


Figura 4.1: Calotta sferica: (a) immagine; (b) silhouette; (c) superficie.

Piramide

La piramide (figura 4.2) è definita su $G_{in} : \{(x, y) | \min\{X, Y\}/2 > |x|, |y|\}$, tramite l'equazione

$$\begin{cases} u(x, y) = \min\{X, Y\} - |x - y| - |x + y| & (x, y) \in G_{in} \\ u(x, y) = 0 & (x, y) \in G_{out}. \end{cases} \quad (4.1)$$

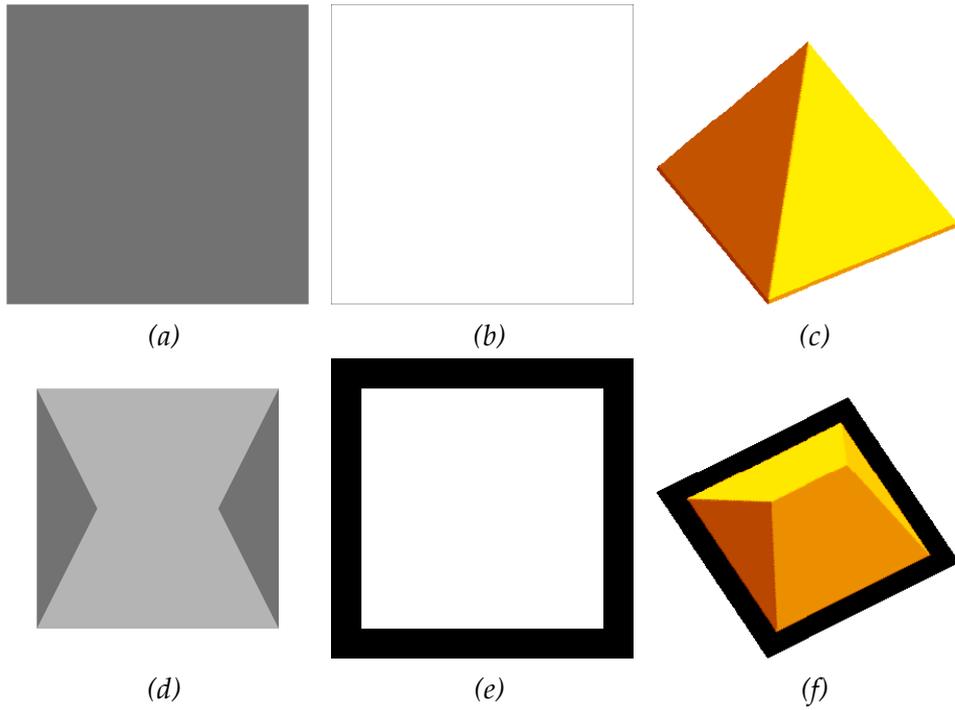


Figura 4.2: Piramide: (a) immagine; (b) silhouette, (c) superficie. Tenda canadese: (d) immagine; (e) silhouette; (f) superficie.

Tenda canadese

La tenda canadese (figura 4.2) è definita con l'equazione

$$\begin{cases} u(x, y) = \min \left\{ -2|x| + \frac{4}{5}X, -|y| + \frac{2}{5}Y \right\} & (x, y) \in G_{in} \\ u(x, y) = 0 & (x, y) \in G_{out}, \end{cases} \quad (4.2)$$

dove

$$G_{in}: \left\{ (x, y) \mid \frac{x}{X}, \frac{y}{Y} < \frac{2}{5} \right\}.$$

Vaso sintetico

Il vaso sintetico è definito come

$$\begin{cases} u(x, y) = \sqrt{P(\bar{y})^2 - x^2} & (x, y) \in G_{in} \\ u(x, y) = 0 & (x, y) \in G_{out}, \end{cases} \quad (4.3)$$

dove $\bar{y} = y/Y$,

$$P(\bar{y}) = (-10.8\bar{y}^6 + 7.2\bar{y}^5 + 6.6\bar{y}^4 - 3.8\bar{y}^3 - 1.375\bar{y}^2 + 0.5\bar{y} + 0.25)X$$

e

$$G_{in}: \{(x, y) \mid P(\bar{y})^2 > x^2\}.$$

L'immagine corrispondente sintetizzata con un modello lambertiano, la mask e una rappresentazione della superficie sono visibili nella figura 4.3.

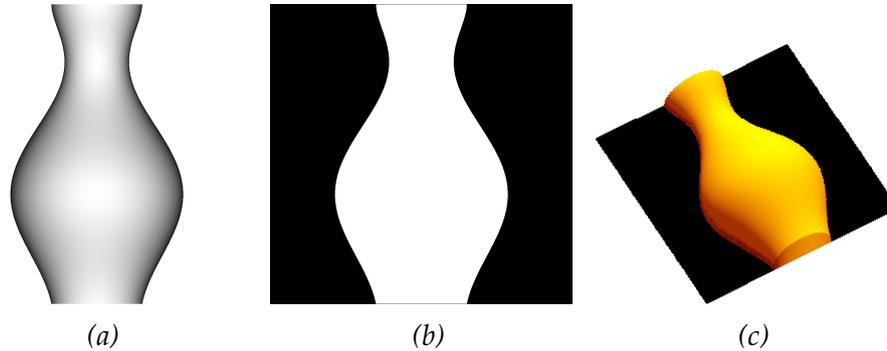


Figura 4.3: Vaso sintetico: (a) immagine; (b) silhouette; (c) superficie.

Paraboloide

Il paraboloide è definito su $G_{in}: \{x^2 + y^2 < r^2\}$, con l'equazione

$$\begin{cases} u(x, y) = r^2 - x^2 - y^2 & (x, y) \in G_{in} \\ u(x, y) = 0 & (x, y) \in G_{out}. \end{cases} \quad (4.4)$$

dove

$$r = \frac{\min\{X, Y\}}{2} - 2\tilde{\delta},$$

con $\tilde{\delta} = \max\{\Delta x, \Delta y\}$.

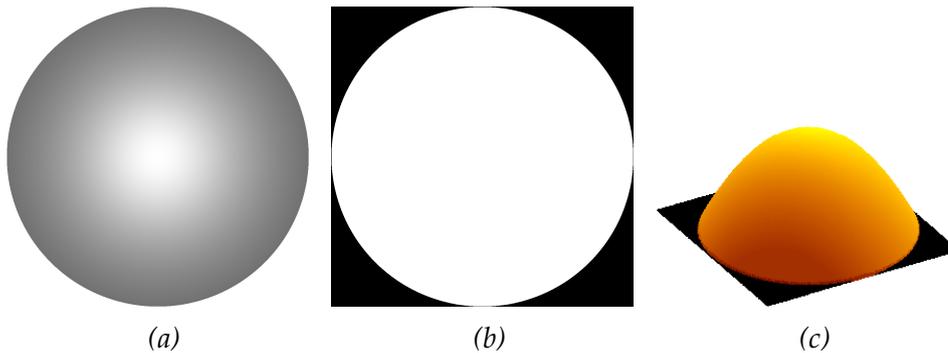


Figura 4.4: Paraboloide: (a) immagine; (b) silhouette; (c) superficie.

Generazione delle immagini di test con un modello predefinito

Ciascuna immagine di test può essere generata, a partire dalla superficie nota, con un modello opportuno. È possibile ottenere immagini di test con differenti modelli e parametri (figura 4.5).

Generazione delle immagini di test con un'illuminazione non verticale

Per tutte le immagini è possibile variare le condizioni di illuminazione per ottenere immagini illuminate da una fonte di luce proveniente da una direzione diversa da quella verticale. Per la generazione di tali immagini è necessario allargare il dominio G in modo tale da poter contenere anche l'ombra generata. (figura 4.6).

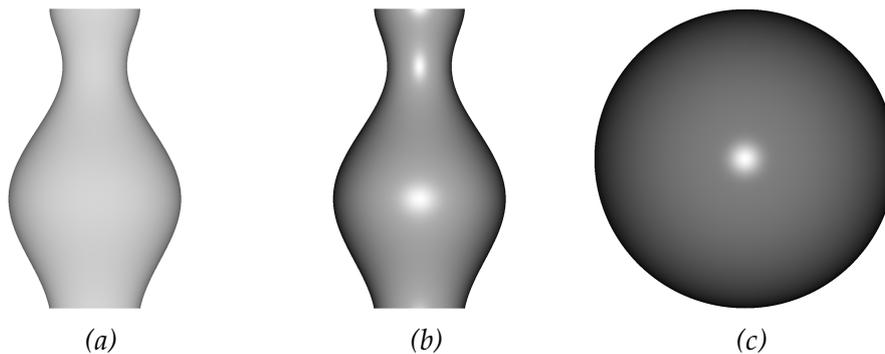


Figura 4.5: Alcune immagini sintetiche generate con modelli differenti da quello lambertiano: (a) vaso sintetico, modello di Oren-Nayar $\sigma = 0.4$; (b) vaso sintetico, modello di Phong $\alpha = 12$, $I_d = 0.7$, $I_s = 0.3$; (c) calotta sferica, modello di Phong $\alpha = 50$, $I_d = 0.5$, $I_s = 0.5$.

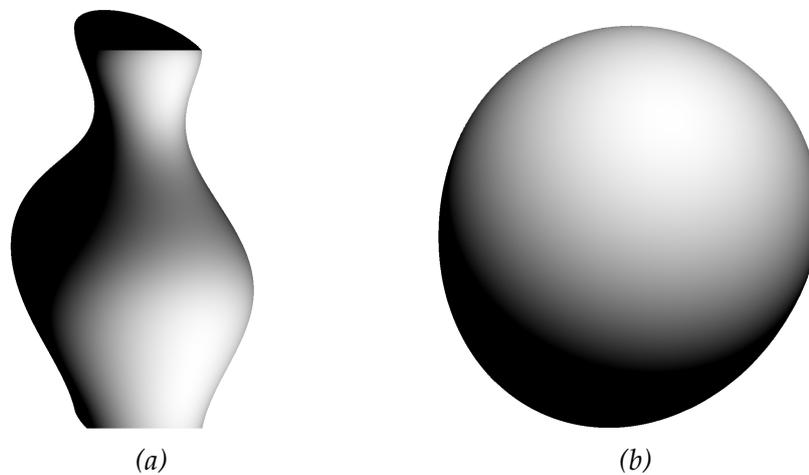


Figura 4.6: Due immagini sintetiche generate con direzione di luce diversa dalla verticale: (a) vaso sintetico, modello di Lambert, direzione dell'illuminazione $\omega = (0.500, -0.500, 0.707)$; (b) calotta sferica, modello di Lambert, direzione dell'illuminazione $\omega = (0.200, 0.500, 0.843)$.

4.1.3 Immagini reali

Di solito non si conosce la superficie degli oggetti ritratti nelle immagini reali. Come anticipato, ciò comporta un serio problema per la valutazione quantitativa dei test effettuati. Come si vedrà più avanti, un parametro di valutazione è il confronto dell'immagine generata dalla superficie ricostruita con l'immagine di partenza.

Le immagini reali utilizzate in questi test sono: Agamennone, immagine di dimensione 507×512 ; Cavallo, immagine di dimensione 184×256 ; Beethoven, di dimensioni 184×256 . Le immagini e le relative mask sono mostrate in figura 4.7.

4.2 Valutazione dell'errore

Per confrontare i metodi e i modelli sono stati utilizzati degli estimatori standard: L^1 , L^2 e L^∞ , definiti come segue:

$$\begin{aligned} L^1(t) &= \frac{1}{N} \sum_{\Omega} |t(x) - \tilde{t}(x)|, \\ L^2(t) &= \left\{ \frac{1}{N} \sum_{\Omega} |t(x) - \tilde{t}(x)|^2 \right\}^{1/2} \\ L^\infty(t) &= \max_{\Omega} \{ |t(x) - \tilde{t}(x)| \} \end{aligned}$$

dove N è il numero totale di punti utilizzati per il calcolo (corrispondente al numero dei punti della griglia appartenente a G_{in}), t e \tilde{t} sono rispettivamente la grandezza (superficie o immagine) nota e quella calcolata. Questi stimatori sono rispettivamente l'errore medio, l'errore quadratico medio e l'errore massimo. In linea di principio l'intento del problema di SfS è quello di ottenere una superficie da un'immagine, quindi il criterio quantitativo dovrebbe essere il confronto tra superfici. D'altra parte nel caso di ricostruzione di immagini reali, non avendo a disposizione nessuna superficie per il confronto siamo costretti ad utilizzare i valori di L^r relativi all'immagine di partenza e all'immagine riprodotta a partire dalla superficie ricostruita.

4.3 Confronti

Un punto interessante della valutazione di uno schema numerico è il confronto con altri schemi numerici. Le tabelle mostrate nel seguito presentano i tempi ed il numero di iterazioni utilizzati per risolvere il problema di SfS, per le diverse immagini e i diversi metodi. Le prove sono state eseguite senza alcuna parallelizzazione su un processore Intel *i5-2415M* a 2.3 GHz con 3 MB di cache $L3$ e sistema operativo Linux. Se non altrimenti specificato, il



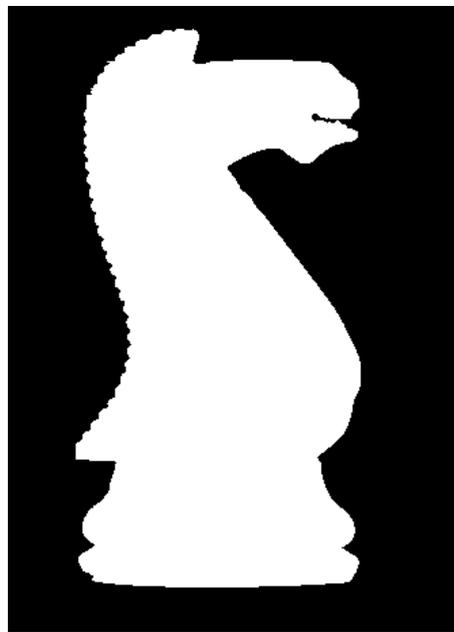
(a)



(b)



(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 4.7: Immagini reali: (a,b) Agamennone. (c,d) Cavallo. (e,f) Beethoven.

Tabella 4.1: Modelli e valori dei parametri utilizzati per la comparazione dei metodi di ricostruzione nel caso di immagini sintetiche.

| modello | I_a | I_d | I_s | α | A | B | σ |
|---------------|-------|-------|-------|----------|--------|-------|----------|
| LA Lambert | | | | | | | |
| O1 Oren-Nayar | | | | | 0.9853 | 0.045 | 0.1 |
| O2 Oren-Nayar | | | | | 0.9459 | 0.138 | 0.2 |
| O3 Oren-Nayar | | | | | 0.8929 | 0.225 | 0.3 |
| P2 Phong | | 0.8 | 0.2 | 1 | | | |
| P3 Phong | 0.1 | 0.6 | 0.3 | 1 | | | |
| P5 Phong | | 0.5 | 0.5 | 1 | | | |

numero massimo di iterazioni per il metodo semilagrangiano è stato fissato a 15000 e la tolleranza η (parametrizzata, al passo $k + 1$, come la differenza in valore assoluto tra i punti della superficie calcolata nei passi $k + 1$ e k) fissata a un valore massimo di 10^{-8} (§ 2.1.1, p. 20).

4.3.1 Immagini sintetiche

Tramite le immagini sintetiche è stato possibile effettuare un confronto tra metodi e testarne la correttezza e altre caratteristiche, quali il tempo di esecuzione. A titolo di esempio riportiamo nelle seguenti tabelle alcuni dei test effettuati. I casi si riferiscono a quanto specificato in tabella 4.1.

Tabella 4.2: Alcuni dei test effettuati con paraboloidi.

| caso | metodo | Iter. | [s] | $L^1(I)$ | $L^2(I)$ | $L^\infty(I)$ | $L^1(S)$ | $L^2(S)$ | $L^\infty(S)$ |
|------|--------|-------|------|----------|----------|---------------|----------|----------|---------------|
| LA | FM | 1 | 0.02 | 0.0030 | 0.0052 | 0.0471 | 0.0102 | 0.0104 | 0.0162 |
| LA | FS | 8 | 0.02 | 0.0030 | 0.0052 | 0.0471 | 0.0103 | 0.0105 | 0.0162 |
| LA | SL | 1772 | 1.56 | 0.0008 | 0.0041 | 0.0471 | 0.0127 | 0.0130 | 0.0207 |
| P3 | FM | 1 | 0.15 | 0.0022 | 0.0032 | 0.0627 | 0.0011 | 0.0013 | 0.0037 |
| P3 | FS | 80 | 1.34 | 0.0052 | 0.0076 | 0.0196 | 0.2463 | 0.4011 | 0.9844 |
| P3 | SL | 1756 | 1.56 | 0.0002 | 0.0023 | 0.0392 | 0.0015 | 0.0020 | 0.0053 |
| O2 | FM | 1 | 0.16 | 0.0021 | 0.0029 | 0.0039 | 0.0004 | 0.0005 | 0.0016 |
| O2 | FS | 1 | 0.00 | 0.0001 | 0.0009 | 0.0039 | 0.0004 | 0.0005 | 0.0016 |
| O2 | SL | 1753 | 1.50 | 0.0001 | 0.0009 | 0.0157 | 0.0032 | 0.0038 | 0.0074 |

Tabella 4.3: Alcuni dei test effettuati con vaso.

| caso | metodo | Iter. | [s] | $L^1(I)$ | $L^2(I)$ | $L^\infty(I)$ | $L^1(S)$ | $L^2(S)$ | $L^\infty(S)$ |
|------|--------|-------|------|----------|----------|---------------|----------|----------|---------------|
| P2 | FM | 1 | 0.08 | 0.0085 | 0.0109 | 0.0471 | 0.1427 | 0.1639 | 0.3015 |
| P2 | FS | 85 | 0.66 | 0.0080 | 0.0108 | 0.0471 | 0.1427 | 0.1639 | 0.3015 |
| P2 | SL | 1007 | 0.55 | 0.0075 | 0.0105 | 0.0431 | 0.1407 | 0.1619 | 0.3015 |

Da questa analisi comparativa si evince che il metodo semilagrangiano, pur essendo più lento dei corrispettivi locali FM e FS, risulta comunque altrettanto valido, ottenendo in alcuni casi (vaso, tabella 4.3, tenda canadese, tabella 4.5) anche risultati migliori.

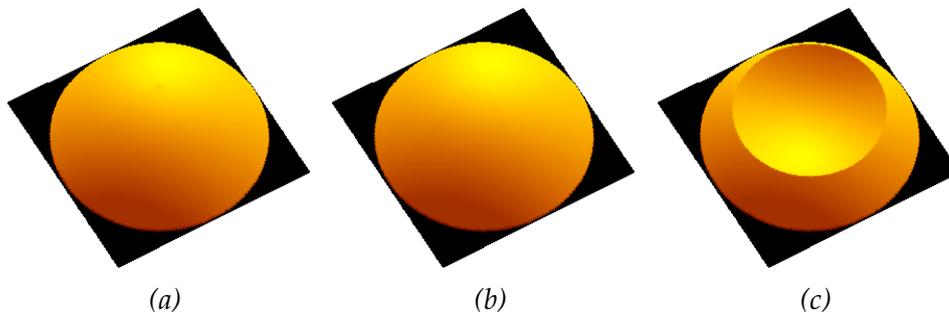


Figura 4.8: Ricostruzione della superficie del paraboloide nel caso del modello di Phong con $\alpha = 1$, $I_a = 0.1$, $I_d = 0.6$, $I_s = 0.2$ (P3): (a) metodo semilagrangiano; (b) metodo Fast Marching; (c) metodo Fast Sweeping.

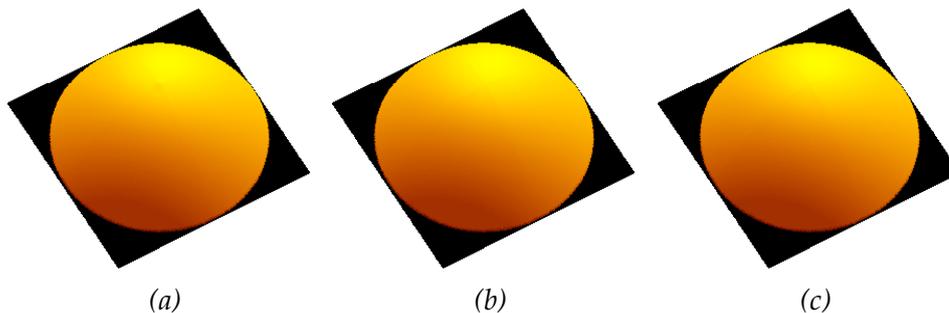


Figura 4.9: Ricostruzione della superficie del paraboloide nel caso del modello di Oren-Nayar con $\alpha = 1$, $I_a = 0.1$, $I_d = 0.6$, $I_s = 0.2$ (O2): (a) metodo semilagrangiano; (b) metodo Fast Marching; (c) metodo Fast Sweeping.P3

È interessante notare il caso P3 del paraboloide ricostruito con FS (tabella 4.2) dove i valori di L^1 , L^2 e L^∞ per le superfici risultano molto differenti dai corrispondenti valori dei metodi FM e semilagrangiano. Uno sguardo alle superfici ricostruite (figura 4.8) con i tre metodi, fornisce una spiegazione: in questo caso FS trova una soluzione possibile, una superficie che per ambiguità concava/convessa è del tutto equivalente alle superfici trovate con gli altri due metodi, ma molto diversa dal paraboloide originale. Questo comportamento non è stato riscontrato in altri casi esaminati, dove, come nel caso O2 (figura 4.9) la superficie ricostruita con il metodo FS non risulta molto differente da quelle ricostruite con gli altri due metodi.

Tabella 4.4: Alcuni dei test effettuati con calotta sferica.

| caso | metodo | Iter. | [s] | $L^1(I)$ | $L^2(I)$ | $L^\infty(I)$ | $L^1(S)$ | $L^2(S)$ | $L^\infty(S)$ |
|------|--------|-------|------|----------|----------|---------------|----------|----------|---------------|
| LA | FM | 1 | 0.02 | 0.0041 | 0.0060 | 0.0745 | 0.0427 | 0.0468 | 0.0836 |
| LA | FS | 9 | 0.02 | 0.0039 | 0.0055 | 0.0471 | 0.0434 | 0.0472 | 0.0836 |
| LA | SL | 2001 | 1.73 | 0.0025 | 0.0046 | 0.0431 | 0.0491 | 0.0529 | 0.0910 |
| O1 | FM | 1 | 0.16 | 0.0035 | 0.0047 | 0.0431 | 0.0426 | 0.0463 | 0.0813 |
| O1 | FS | 1 | 0.00 | 0.0035 | 0.0047 | 0.0431 | 0.0426 | 0.0463 | 0.0813 |
| O1 | SL | 2013 | 1.73 | 0.0018 | 0.0040 | 0.0431 | 0.0493 | 0.0530 | 0.0907 |
| O3 | FM | 1 | 0.17 | 0.0033 | 0.0042 | 0.0353 | 0.0415 | 0.0451 | 0.0810 |
| O3 | FS | 1 | 0.00 | 0.0022 | 0.0036 | 0.0353 | 0.0426 | 0.0463 | 0.0813 |
| O3 | SL | 1988 | 1.73 | 0.0008 | 0.0024 | 0.0353 | 0.0526 | 0.0566 | 0.0981 |

Tabella 4.5: Alcuni dei test effettuati con tenda canadese.

| caso | metodo | Iter. | [s] | $L^1(I)$ | $L^2(I)$ | $L^\infty(I)$ | $L^1(S)$ | $L^2(S)$ | $L^\infty(S)$ |
|------|--------|-------|------|----------|----------|---------------|----------|----------|---------------|
| LA | FM | 1 | 0.01 | 0.0033 | 0.0076 | 0.1451 | 0.0068 | 0.0070 | 0.0097 |
| LA | FS | 5 | 0.01 | 0.0031 | 0.0066 | 0.0824 | 0.0068 | 0.0070 | 0.0097 |
| LA | SL | 1637 | 0.87 | 0.0004 | 0.0057 | 0.0824 | 0.0053 | 0.0055 | 0.0093 |
| P5 | FM | 1 | 0.12 | 0.0013 | 0.0041 | 0.0745 | 0.0068 | 0.0070 | 0.0097 |
| P5 | SL | 332 | 0.20 | 0.0002 | 0.0030 | 0.0431 | 0.0058 | 0.0060 | 0.0093 |

Tabella 4.6: Alcuni dei test effettuati con piramide.

| caso | metodo | Iter. | [s] | $L^1(I)$ | $L^2(I)$ | $L^\infty(I)$ | $L^1(S)$ | $L^2(S)$ | $L^\infty(S)$ |
|------|--------|-------|------|----------|----------|---------------|----------|----------|---------------|
| LA | FM | 1 | 0.01 | 0.0036 | 0.0038 | 0.0157 | 0.0078 | 0.0109 | 0.0209 |
| LA | FS | 6 | 0.01 | 0.0036 | 0.0038 | 0.0039 | 0.0078 | 0.0109 | 0.0209 |
| LA | SL | 3343 | 2.31 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0125 | 0.0151 | 0.0345 |
| P5 | FM | 1 | 0.18 | 0.0038 | 0.0039 | 0.0078 | 0.0078 | 0.0109 | 0.0209 |
| P5 | FS | 67 | 0.80 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0039 | 0.0078 | 0.0109 | 0.0209 |
| P5 | SL | 680 | 0.49 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0114 | 0.0141 | 0.0315 |

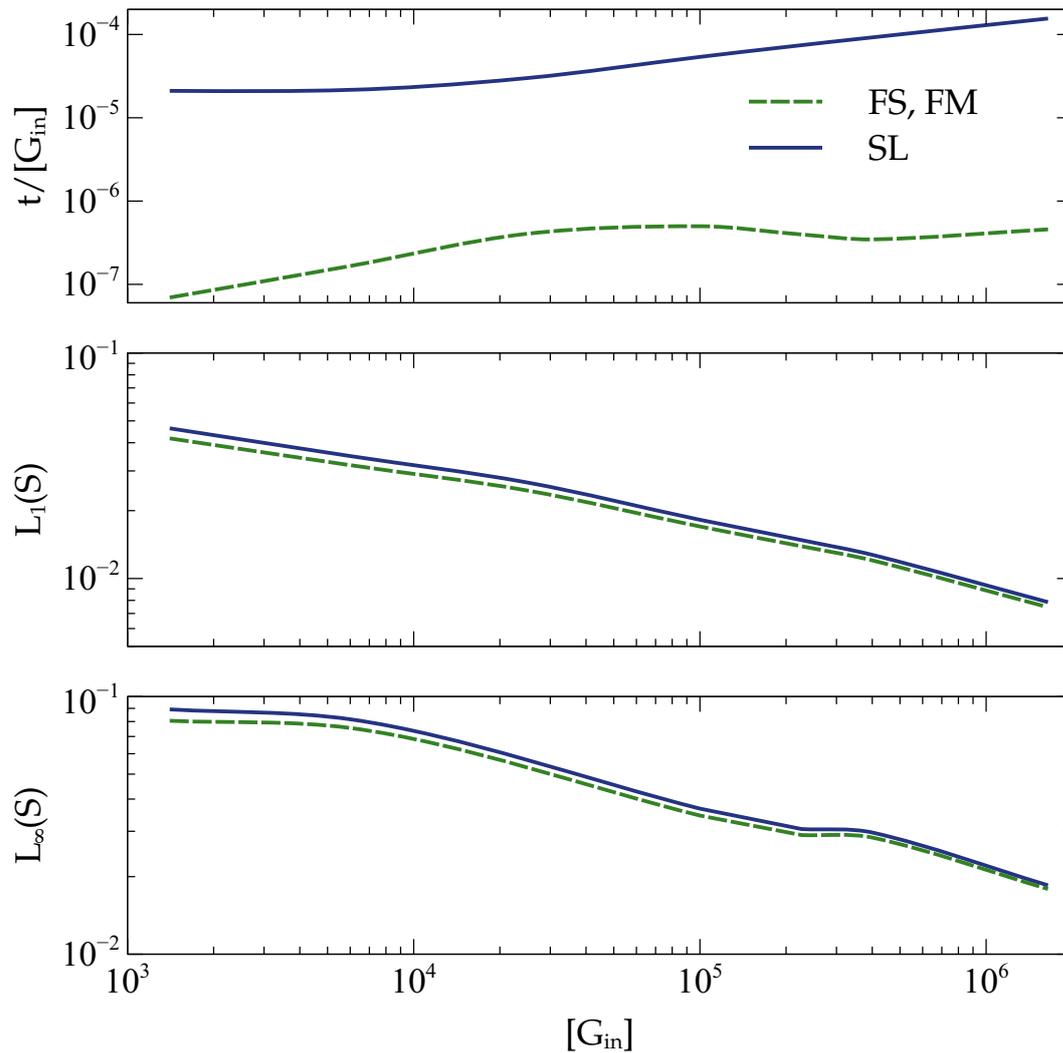


Figura 4.10: Tempo medio di esecuzione per ogni nodo della griglia $t/[G_{in}]$, L^1 e L^2 delle superfici ricostruite in funzione della cardinalità dei punti della griglia presenti in G_{in} per l'immagine vaso sintetico a varie dimensioni (da 64×64 a 2048×2048).

In figura 4.10 è possibile osservare come i tre modelli si confrontino sui valori di L^1 , L^∞ . La superficie ricostruita è relativa a test effettuati con un'immagine sintetica (vaso) di dimensioni crescenti (da 64×64 a 2048×2048), per il modello lambertiano, in funzione della cardinalità dei punti della griglia contenuti in G_{in} . Questo test è una conferma ulteriore di quanto già detto precedentemente, ovvero che il metodo semilagrangiano, pur essendo più lento dei corrispettivi locali FM e FS, ci permette di ottenere risultati compatibili. Sebbene i risultati dei test con il metodo semilagrangiano risultino di poco peggiori rispetto a FM e FS, abbiamo notato precedentemente che tale lieve differenza possa invertirsi a seconda dell'immagine e dei parametri applicati.

Tabella 4.7: Alcuni dei modelli utilizzati per i confronti sull'immagine Agamennone

| caso | I_a | I_d | I_s | α | A | B | σ |
|----------|-------|-------|-------|----------|--------|--------|----------|
| AG.LA | | | | | | | |
| AG.O1 | | | | | 0.9853 | 0.0450 | 0.1 |
| AG.O2 | | | | | 0.9459 | 0.1385 | 0.2 |
| AG.O3 | | | | | 0.8929 | 0.2250 | 0.3 |
| AG.P4.A1 | 0.6 | 0.4 | 1 | | | | |
| AG.P4.A2 | 0.6 | 0.4 | 2 | | | | |
| AG.P4.A3 | 0.6 | 0.4 | 3 | | | | |
| AG.P4.A4 | 0.6 | 0.4 | 4 | | | | |
| AG.P8.A1 | 0.2 | 0.8 | 1 | | | | |
| AG.P8.A2 | 0.2 | 0.8 | 2 | | | | |

4.3.2 Immagini reali

Per ciascuna delle immagini reali scelte, sono state confrontate le ricostruzioni ottenute (con i tre modelli e i tre metodi, con una variazione dei parametri relativi). Per ciascuna immagine riportiamo alcuni dei test effettuati e, come esempio, alcune delle superfici ricostruite.

| caso | metodo | Iter. | [s] | $L^1(I)$ | $L^2(I)$ | $L^\infty(I)$ |
|----------|--------|-------|-------|----------|----------|---------------|
| AG.LA | FM | 1 | 0.06 | 0.0214 | 0.0377 | 0.4745 |
| AG.LA | FS | 51 | 0.15 | 0.0214 | 0.0376 | 0.4745 |
| AG.LA | SL | 6946 | 21.61 | 0.0219 | 0.0422 | 0.6510 |
| AG.O1 | FM | 1 | 0.56 | 0.0218 | 0.0411 | 0.9216 |
| AG.O1 | FS | 1 | 0.00 | 0.0218 | 0.0411 | 0.9216 |
| AG.O1 | SL | 4268 | 12.98 | 0.0236 | 0.0389 | 0.4745 |
| AG.O2 | FM | 1 | 0.57 | 0.0264 | 0.0585 | 0.8078 |
| AG.O2 | FS | 1 | 0.00 | 0.0456 | 0.0528 | 0.8314 |
| AG.O2 | SL | 6984 | 21.19 | 0.0420 | 0.0526 | 0.4941 |
| AG.O3 | FM | 1 | 0.57 | 0.0273 | 0.0561 | 0.7216 |
| AG.O3 | FS | 1 | 0.00 | 0.0273 | 0.0561 | 0.7216 |
| AG.O3 | SL | 12090 | 36.95 | 0.0675 | 0.0757 | 0.5137 |
| AG.P4.A1 | FM | 1 | 0.55 | 0.0221 | 0.0387 | 0.4824 |
| AG.P4.A1 | FS | 152 | 7.83 | 0.0220 | 0.0386 | 0.4824 |
| AG.P4.A1 | SL | 2127 | 6.45 | 0.0214 | 0.0383 | 0.4824 |
| AG.P4.A2 | FM | 1 | 0.53 | 0.0215 | 0.0378 | 0.4745 |
| AG.P4.A2 | FS | 167 | 8.59 | 0.0214 | 0.0377 | 0.4706 |
| AG.P4.A3 | FM | 1 | 0.66 | 0.0215 | 0.0377 | 0.4706 |
| AG.P4.A3 | FS | 173 | 15.64 | 0.0214 | 0.0376 | 0.4706 |
| AG.P4.A4 | FM | 1 | 0.69 | 0.0215 | 0.0377 | 0.4706 |
| AG.P4.A4 | FS | 182 | 16.27 | 0.0214 | 0.0375 | 0.4706 |
| AG.P8.A1 | FM | 1 | 0.55 | 0.0226 | 0.0396 | 0.4902 |
| AG.P8.A1 | FS | 146 | 7.73 | 0.0224 | 0.0395 | 0.4902 |
| AG.P8.A1 | SL | 1476 | 4.48 | 0.0216 | 0.0391 | 0.4941 |
| AG.P8.A2 | FM | 1 | 0.54 | 0.0221 | 0.0390 | 0.4863 |
| AG.P8.A2 | FS | 153 | 7.64 | 0.0220 | 0.0388 | 0.4863 |

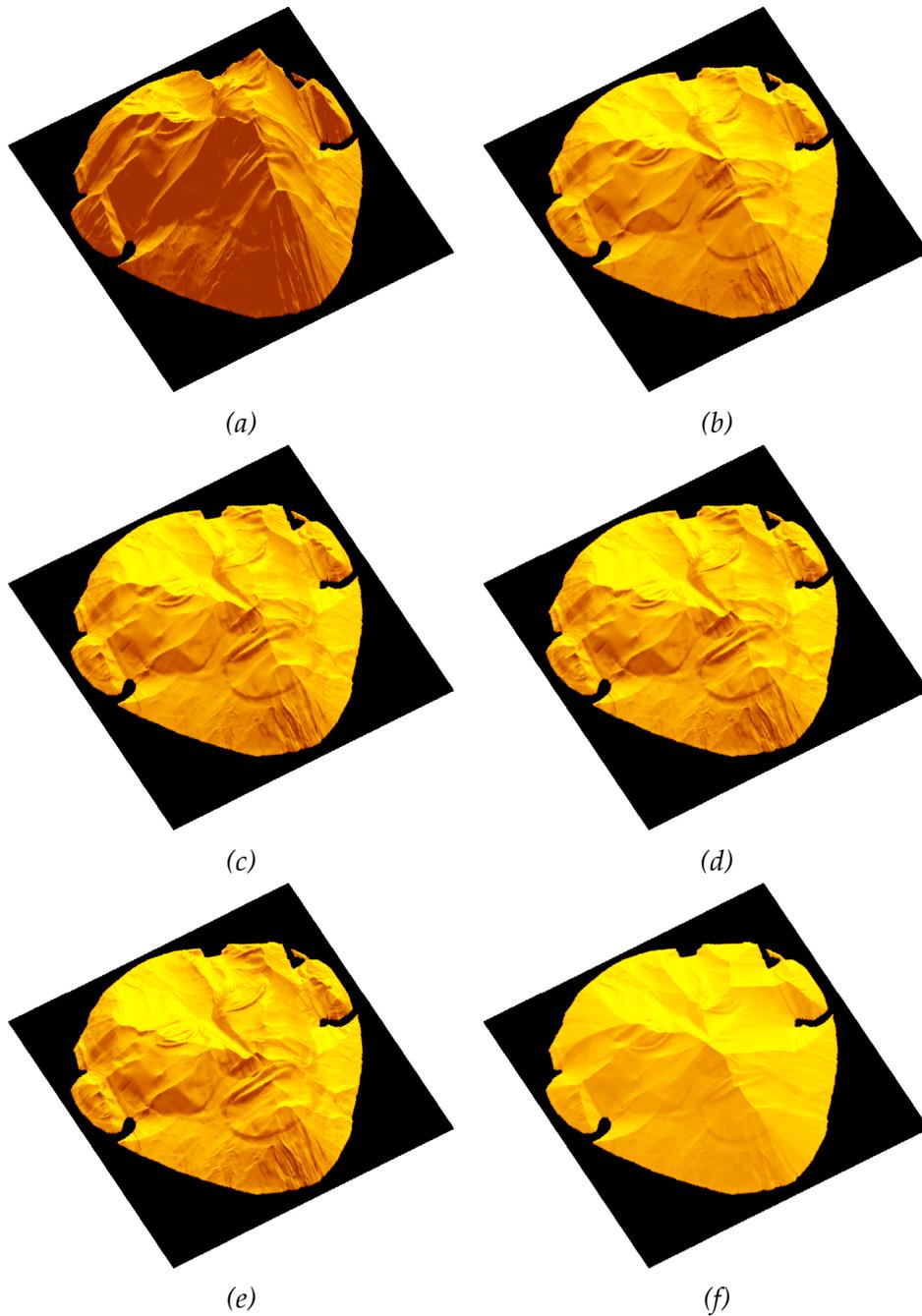


Figura 4.11: Superfici ricostruite di Agamennone (FS): (a) AG.LA, (b) AG.P4.A1, (c) AG.P4.A2, (d) AG.P4.A3. (e) AG.P4.A4, (f) AG.P8.A1.

Tabella 4.8: Alcuni dei modelli utilizzati per i confronti sull'immagine Cavallo

| caso | I_a | I_d | I_s | α | A | B | σ |
|----------|-------|-------|-------|----------|--------|--------|----------|
| CA.LA | 0 | | | | | | |
| CA.O1 | 0 | | | | 0.9853 | 0.0450 | 0.1 |
| CA.O2 | 0 | | | | 0.9459 | 0.1385 | 0.2 |
| CA.O3 | 0 | | | | 0.8929 | 0.2250 | 0.3 |
| CA.P0.A1 | 0 | 1 | 0 | 1 | | | |
| CA.P0.A5 | 0 | 1 | 0 | 5 | | | |
| CA.P0.AA | 0 | 1 | 0 | 10 | | | |
| CA.P4.A1 | 0 | 0.6 | 0.4 | 1 | | | |
| CA.P4.A5 | 0 | 0.6 | 0.4 | 5 | | | |
| CA.P4.AA | 0 | 0.6 | 0.4 | 10 | | | |
| CA.P8.A1 | 0 | 0.2 | 0.8 | 1 | | | |
| CA.P8.A5 | 0 | 0.2 | 0.8 | 5 | | | |
| CA.P8.AA | 0 | 0.2 | 0.8 | 10 | | | |

| caso | metodo | Iter. | [s] | $L^1(I)$ | $L^2(I)$ | $L^\infty(I)$ |
|----------|--------|-------|------|----------|----------|---------------|
| CA.LA | FM | 1 | 0.01 | 0.0364 | 0.0615 | 0.6980 |
| CA.LA | FS | 1 | 0.34 | 0.1978 | 0.2333 | 0.8431 |
| CA.LA | SL | 4599 | 1.88 | 0.0347 | 0.0594 | 0.6863 |
| CA.O1 | FM | 1 | 0.08 | 0.0401 | 0.0657 | 0.6980 |
| CA.O1 | FS | 1 | 0.00 | 0.0401 | 0.0657 | 0.6980 |
| CA.O1 | SL | 6000 | 2.45 | 0.0308 | 0.0495 | 0.6627 |
| CA.O2 | FM | 1 | 0.06 | 0.0447 | 0.0665 | 0.6863 |
| CA.O2 | FS | 1 | 0.00 | 0.0750 | 0.0828 | 0.6078 |
| CA.O2 | SL | 6000 | 2.39 | 0.0459 | 0.0669 | 0.6627 |
| CA.O3 | FM | 1 | 0.03 | 0.0846 | 0.0975 | 0.6196 |
| CA.O3 | FS | 1 | 0.00 | 0.0846 | 0.0975 | 0.6196 |
| CA.O3 | SL | 6000 | 2.38 | 0.1256 | 0.1512 | 0.5647 |
| CA.P0.A1 | FM | 1 | 0.10 | 0.0446 | 0.0682 | 0.6941 |
| CA.P0.A1 | FS | 51 | 0.36 | 0.0445 | 0.0679 | 0.6941 |
| CA.P0.A5 | FM | 1 | 0.10 | 0.0446 | 0.0682 | 0.6941 |
| CA.P0.A5 | FS | 51 | 0.43 | 0.0445 | 0.0679 | 0.6941 |
| CA.P0.AA | FM | 1 | 0.10 | 0.0446 | 0.0682 | 0.6941 |
| CA.P0.AA | FS | 51 | 0.42 | 0.0445 | 0.0679 | 0.6941 |
| CA.P4.A1 | FM | 1 | 0.10 | 0.0442 | 0.0680 | 0.6902 |
| CA.P4.A1 | FS | 45 | 0.37 | 0.0440 | 0.0677 | 0.6902 |
| CA.P4.A5 | FM | 1 | 0.08 | 0.0438 | 0.0670 | 0.6941 |
| CA.P4.A5 | FS | 53 | 0.48 | 0.0436 | 0.0665 | 0.6941 |
| CA.P4.AA | FM | 1 | 0.10 | 0.0437 | 0.0669 | 0.6941 |
| CA.P4.AA | FS | 63 | 0.49 | 0.0435 | 0.0664 | 0.6941 |
| CA.P8.A1 | FM | 1 | 0.08 | 0.0793 | 0.1138 | 0.7098 |
| CA.P8.A1 | FS | 42 | 0.34 | 0.0793 | 0.1138 | 0.7098 |
| CA.P8.A5 | FM | 1 | 0.10 | 0.0458 | 0.0738 | 0.6863 |
| CA.P8.A5 | FS | 47 | 0.59 | 0.0457 | 0.0737 | 0.6863 |
| CA.P8.AA | FM | 1 | 0.10 | 0.0441 | 0.0723 | 0.6863 |
| CA.P8.AA | FS | 48 | 0.58 | 0.0440 | 0.0721 | 0.6863 |

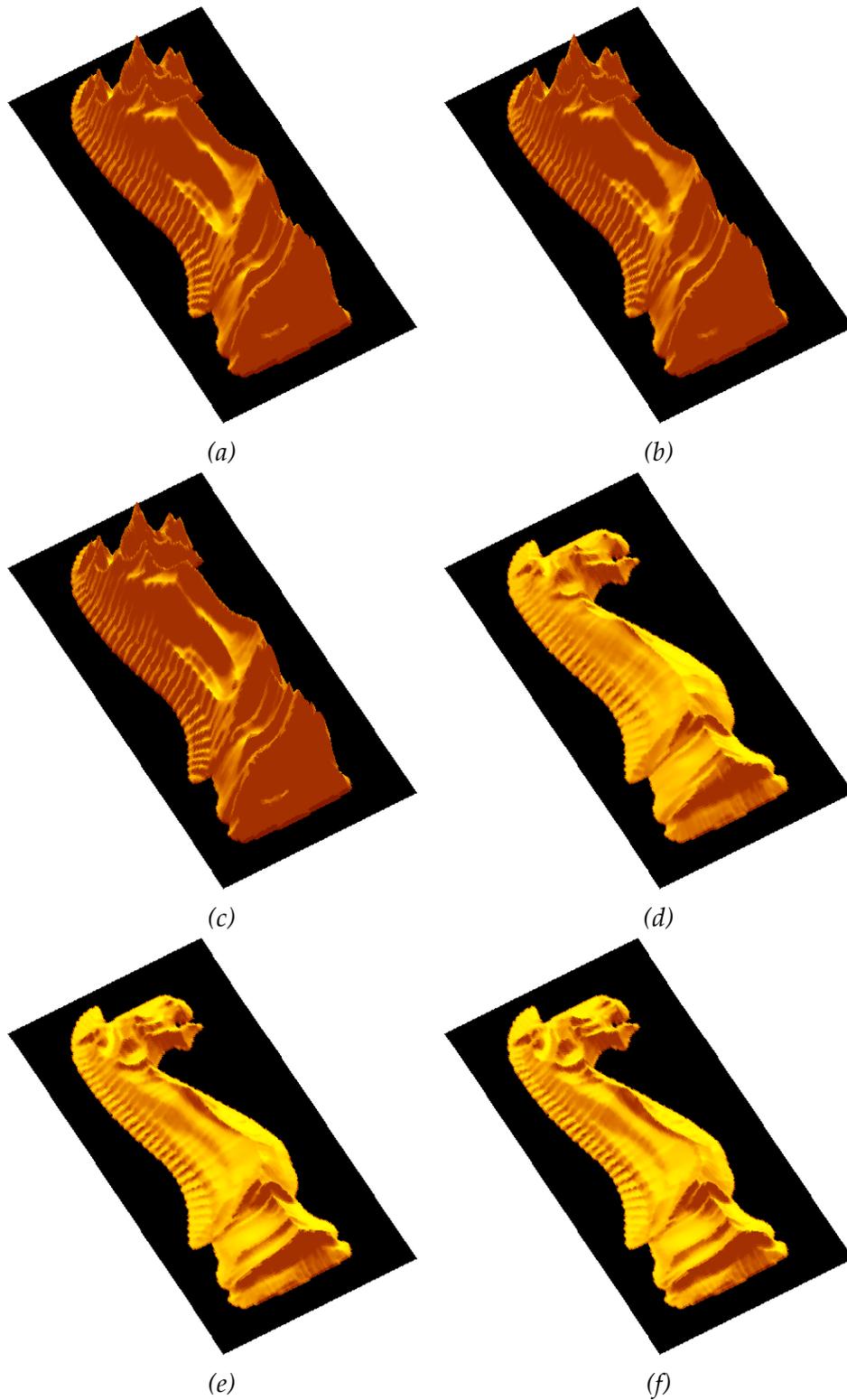


Figura 4.12: Superfici ricostruite di Cavallo (FM): (a) CA.P4.A1, (b) CA.P4.A5, (c) CA.P4.AA, (d) CA.P8.A1, (e) CA.P8.A5(f) CA.P8.AA.

Tabella 4.9: Alcuni dei modelli utilizzati per i confronti sull'immagine Beethoven

| caso | I_a | I_d | I_s | α | A | B | σ |
|----------|-------|-------|-------|----------|--------|--------|----------|
| BE.LA | 0 | | | | | | |
| BE.O1 | 0 | | | | 0.9853 | 0.0450 | 0.1 |
| BE.O2 | 0 | | | | 0.9459 | 0.1385 | 0.2 |
| BE.O3 | 0 | | | | 0.8929 | 0.2250 | 0.3 |
| BE.P2.A1 | 0 | 0.8 | 0.2 | 1 | | | |
| BE.P2.A2 | 0 | 0.8 | 0.2 | 2 | | | |
| BE.P2.A4 | 0 | 0.8 | 0.2 | 4 | | | |
| BE.P6.A1 | 0 | 0.4 | 0.6 | 1 | | | |
| BE.P6.A2 | 0 | 0.4 | 0.6 | 2 | | | |
| BE.P6.A4 | 0 | 0.4 | 0.6 | 4 | | | |
| BE.PA.A1 | 0 | 0 | 1 | 1 | | | |
| BE.PA.A2 | 0 | 0 | 1 | 2 | | | |
| BE.PA.A4 | 0 | 0 | 1 | 4 | | | |

| caso | metodo | Iter. | [s] | $L^1(I)$ | $L^2(I)$ | $L^\infty(I)$ |
|----------|--------|-------|------|----------|----------|---------------|
| BE.LA | FM | 1 | 0.01 | 0.0349 | 0.0623 | 0.4157 |
| BE.LA | FS | 21 | 0.02 | 0.0343 | 0.0616 | 0.4157 |
| BE.LA | SL | 4098 | 2.35 | 0.0366 | 0.0627 | 0.4157 |
| BE.O1 | FM | 1 | 0.10 | 0.0362 | 0.0661 | 0.9020 |
| BE.O1 | FS | 1 | 0.00 | 0.0362 | 0.0661 | 0.9020 |
| BE.O2 | FM | 1 | 0.10 | 0.0386 | 0.0698 | 0.8118 |
| BE.O2 | FS | 1 | 0.00 | 0.0431 | 0.0582 | 0.8118 |
| BE.O2 | SL | 6073 | 3.51 | 0.0588 | 0.0778 | 0.4235 |
| BE.O3 | FM | 1 | 0.10 | 0.0479 | 0.0858 | 0.6863 |
| BE.O3 | FS | 1 | 0.00 | 0.0479 | 0.0858 | 0.6863 |
| BE.O3 | SL | 6681 | 3.81 | 0.0884 | 0.1023 | 0.4235 |
| BE.P2.A1 | FM | 1 | 0.10 | 0.0355 | 0.0628 | 0.4157 |
| BE.P2.A1 | FS | 65 | 0.61 | 0.0343 | 0.0620 | 0.4157 |
| BE.P2.A1 | SL | 2423 | 1.44 | 0.0333 | 0.0613 | 0.4118 |
| BE.P2.A2 | FM | 1 | 0.09 | 0.0349 | 0.0620 | 0.4157 |
| BE.P2.A2 | FS | 64 | 0.59 | 0.0341 | 0.0616 | 0.4157 |
| BE.P2.A4 | FM | 1 | 0.14 | 0.0347 | 0.0619 | 0.4157 |
| BE.P2.A4 | FS | 65 | 1.09 | 0.0339 | 0.0614 | 0.4157 |
| BE.P6.A1 | FM | 1 | 0.11 | 0.0352 | 0.0636 | 0.4431 |
| BE.P6.A1 | FS | 61 | 0.58 | 0.0339 | 0.0629 | 0.4392 |
| BE.P6.A1 | SL | 1305 | 0.85 | 0.0332 | 0.0623 | 0.4392 |
| BE.P6.A2 | FM | 1 | 0.11 | 0.0350 | 0.0628 | 0.4196 |
| BE.P6.A2 | FS | 61 | 0.58 | 0.0342 | 0.0625 | 0.4196 |
| BE.P6.A4 | FM | 1 | 0.12 | 0.0356 | 0.0628 | 0.4118 |
| BE.P6.A4 | FS | 65 | 1.20 | 0.0347 | 0.0625 | 0.4118 |
| BE.PA.A1 | FM | 1 | 0.11 | 0.0339 | 0.0625 | 0.4392 |
| BE.PA.A1 | FS | 52 | 0.51 | 0.0334 | 0.0626 | 0.4314 |
| BE.PA.A1 | SL | 501 | 0.32 | 0.0328 | 0.0622 | 0.4314 |
| BE.PA.A2 | FM | 1 | 0.11 | 0.0340 | 0.0624 | 0.4275 |
| BE.PA.A2 | FS | 61 | 0.54 | 0.0331 | 0.0621 | 0.4275 |
| BE.PA.A4 | FM | 1 | 0.14 | 0.0339 | 0.0623 | 0.4275 |
| BE.PA.A4 | FS | 57 | 1.08 | 0.0330 | 0.0620 | 0.4275 |

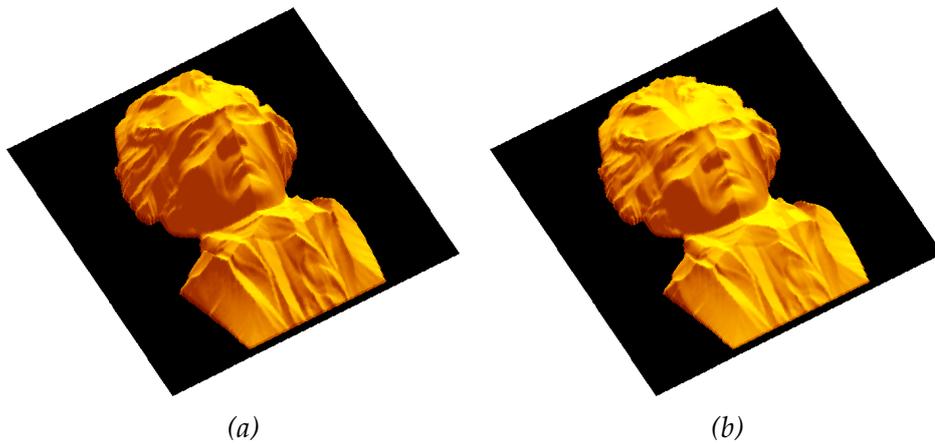


Figura 4.13: Superfici ricostruite di Beethoven (FM): (a) BA.LA, (b) BA.P4.A1.

4.3.3 Luce obliqua per il modello lambertiano

Per il metodo lambertiano per luce obliqua, riportiamo alcuni dei test effettuati con i relativi valori utilizzati per la direzione della luce $\hat{\omega}$:

- Beethoven (256×256), $\hat{\omega} = (0, 0.0995, 0.995)$;
- Piramide (224×272), $\hat{\omega} = (0.6124, 0.6124, 0.5)$;
- Paraboloide (184×128), $\hat{\omega} = (0.866, 0, 0.5)$;
- Vaso (128×138), $\hat{\omega} = (0.6773, -0.2873, 0.6773)$.

Per particolari condizioni di illuminazione, il bordo delle immagini sintetiche, che non cada nella regione d'ombra, è utilizzabile nella definizione dell'equazione impiegata nel metodo. Il metodo di ricostruzione dell'immagine per il modello lambertiano e luce obliqua, risulta più oneroso in termini di tempo per singola iterazione. Per questa ragione il numero massimo di iterazioni è stato fissato a 9000. In nessuno dei casi riportati la ricostruzione si è conclusa entro questo limite. Per ognuno dei casi viene riportato in tabella il valore del parametro di tolleranza η_k raggiunta al momento dello stop.

| | Iter. | [s] | $L_1(I)$ | $L_2(I)$ | $L_\infty(I)$ | $L_1(S)$ | $L_2(S)$ | $L_\infty(S)$ | η_k |
|-------------|-------|--------|----------|----------|---------------|----------|----------|---------------|---------------------|
| vaso | 9000 | 54.76 | 0.0237 | 0.0435 | 0.4627 | 0.0636 | 0.0866 | 0.2973 | $4.2 \cdot 10^{-4}$ |
| vaso+bordo | 9000 | 49.23 | 0.0190 | 0.0334 | 0.4627 | 0.0552 | 0.0750 | 0.2973 | $4.2 \cdot 10^{-4}$ |
| piramide | 9000 | 69.89 | 0.0150 | 0.0349 | 0.4235 | 0.2911 | 0.3996 | 1.0585 | $7.6 \cdot 10^{-5}$ |
| paraboloide | 9000 | 77.51 | 0.0116 | 0.0251 | 0.7333 | 0.1009 | 0.1505 | 0.4962 | $7.1 \cdot 10^{-5}$ |
| Beethoven | 9000 | 304.60 | 0.0824 | 0.1004 | 0.4235 | | | | $8.3 \cdot 10^{-6}$ |

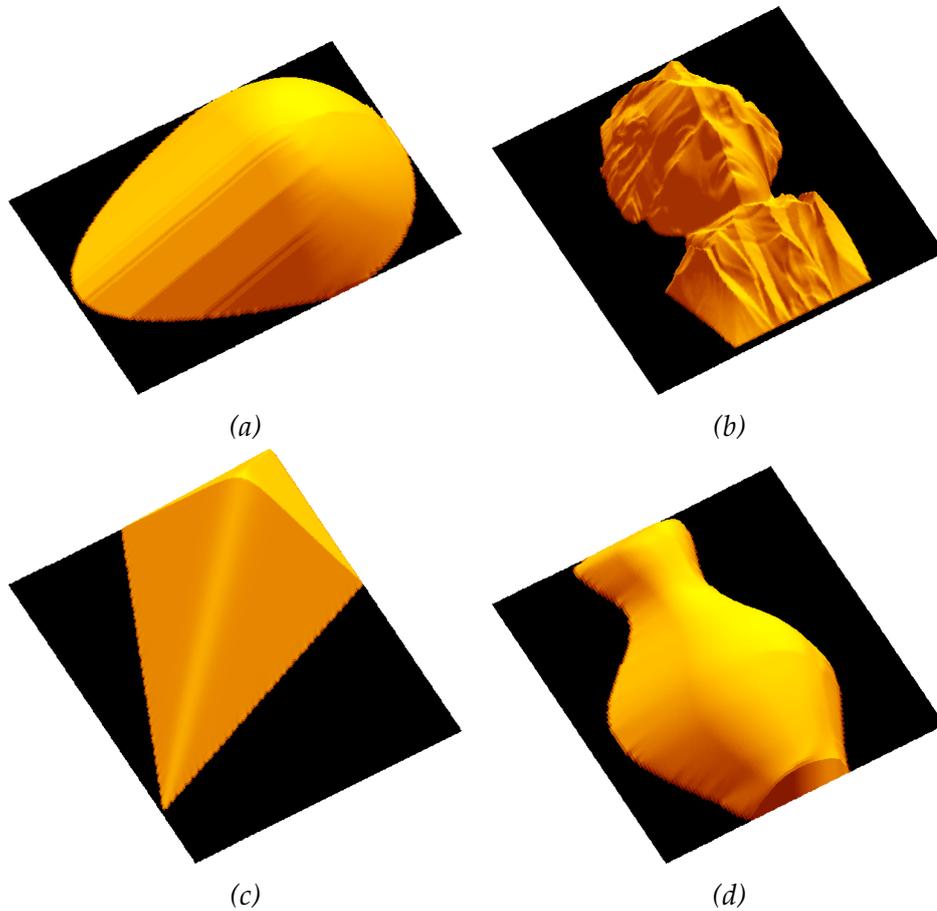


Figura 4.14: Superfici ricostruite con luce obliqua: (a) paraboloide, (b) beethoven, (c) piramide, (d) vaso con bordo.

4.4 Ricerca di un modello generico

Molto spesso non si conosce nulla delle superfici rappresentate nell'immagine. Non si possiede nessuna informazione che ci permetta di poter scegliere un modello piuttosto che un altro. Anche quando il modello sia stato scelto, non abbiamo nessuna informazione sugli eventuali parametri da utilizzare. L'assenza di informazioni sulla superficie rappresentata nell'immagine non può fornirci molte informazioni, nemmeno a ricostruzione avvenuta. Per questi motivi può essere molto interessante stabilire a priori un criterio di scelta che ci permetta di utilizzare in casi generici un modello più appropriato. Per tentare di rispondere a questa esigenza è stata effettuata una semplice analisi comparativa. Alcune immagini sintetiche sono state generate con un

modello e le rispettive superfici sono state ricostruite utilizzando modelli differenti o una variazione nei parametri del modello stesso.

I tre modelli esaminati in questo lavoro, producono e interpretano tipologie di riflessione e diffusione diverse. Per questa ragione non sarebbe utile confrontare il modello di Phong nel caso di alta costante di riflessione, o nel caso di alto valore di I_s , con gli altri modelli, perché gli effetti di un tale modello sarebbero talmente evidenti da imporne la scelta nei casi più utili e tali da scartarlo per i casi in cui non si presenti nessuna evidente riflessione. D'altro canto il modello di Phong, per valori bassi del parametro α e di I_s , non presenta caratteristiche qualitative molto visibili che lo differenziano rispetto agli altri modelli. Per ottenere un insieme valido di parametri per i confronti, si è deciso di mantenere il parametro $\alpha = 1$, e I_s tra i valori 0.1, 0.2 e 0.3. Per il modello di Oren-Nayar, il parametro σ è stato fatto variare tra 0.1, 0.3 e 0.5.

Sono state generate sette immagini per il vaso sintetico e per la calotta sferica, tutte di dimensione 256×256 , con le seguenti combinazioni di modello e parametri:

LA Modello lambertiano;

O1 Modello di Oren-Nayar con $\sigma = 0.1$;

O3 Modello di Oren-Nayar con $\sigma = 0.3$;

O5 Modello di Oren-Nayar con $\sigma = 0.5$;

P1 Modello di Phong con $\alpha = 0.1$, $I_d = 0.9$ e $I_s = 0.1$;

P2 Modello di Phong con $\alpha = 0.1$, $I_d = 0.8$ e $I_s = 0.2$;

P3 Modello di Phong con $\alpha = 0.1$, $I_d = 0.7$ e $I_s = 0.3$.

Ognuna di queste immagini è stata successivamente ricostruita con tutte le sette combinazioni. I risultati delle superfici ricostruite sono stati confrontati in termini di L^1 , L^2 e L^∞ con la superficie di partenza. I valori ottenuti sono riportati in tabella 4.10 e 4.11. Per un confronto più diretto si può osservare quanto riportato in figura 4.15: la magnitudine dei valori di L per i singoli test varia dal bianco al rosso/blu, corrispondenti al minimo ed al massimo valore di L osservato. Alcuni risultati della ricostruzione della superficie dell'immagine generata con il modello di Lambert sono riportati in figura 4.16.

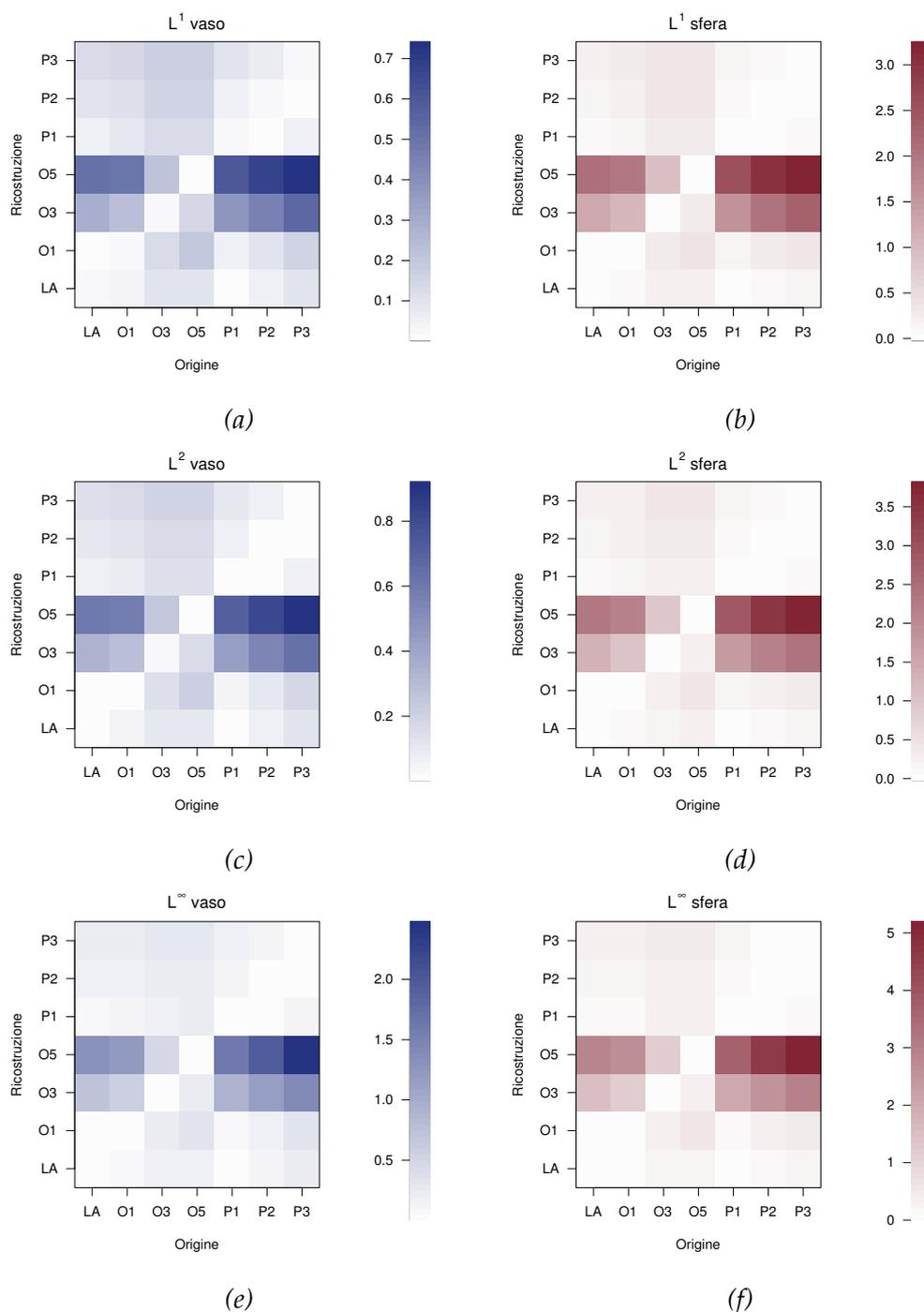


Figura 4.15: Confronto tra metodi: Valore L^∞ , L^1 e L^2 , rispetto alle superfici originale e ricostruita, ottenuti nel calcolo dall'immagine sintetica vaso, e calotta sferica, generate e ricostruite con modelli differenti. In ciascuno dei grafici sull'asse x sono riportati i modelli utilizzati per generare l'immagine, sull'asse y i modelli utilizzati per ricostruirle. La magnitudine dei valori di L per i singoli test varia dal bianco al rosso/blu corrispondenti al minimo ed al massimo valore di L osservato. I modelli utilizzati sono stati definiti come **LA**: modello di Lambert; **O1**, **O3**, **O5**: modello di Oren-Nayar, con valori di $\sigma = 0.1, 0.3, 0.5$; **P1**, **P2**, **P3**: modello di Phong con $\alpha = 1$ e valori di $I_s = 0.1, 0.2, 0.3$. (a, c, e) L^1, L^2, L^∞ vaso. (b, d, f) L^1, L^2, L^∞ sfera.

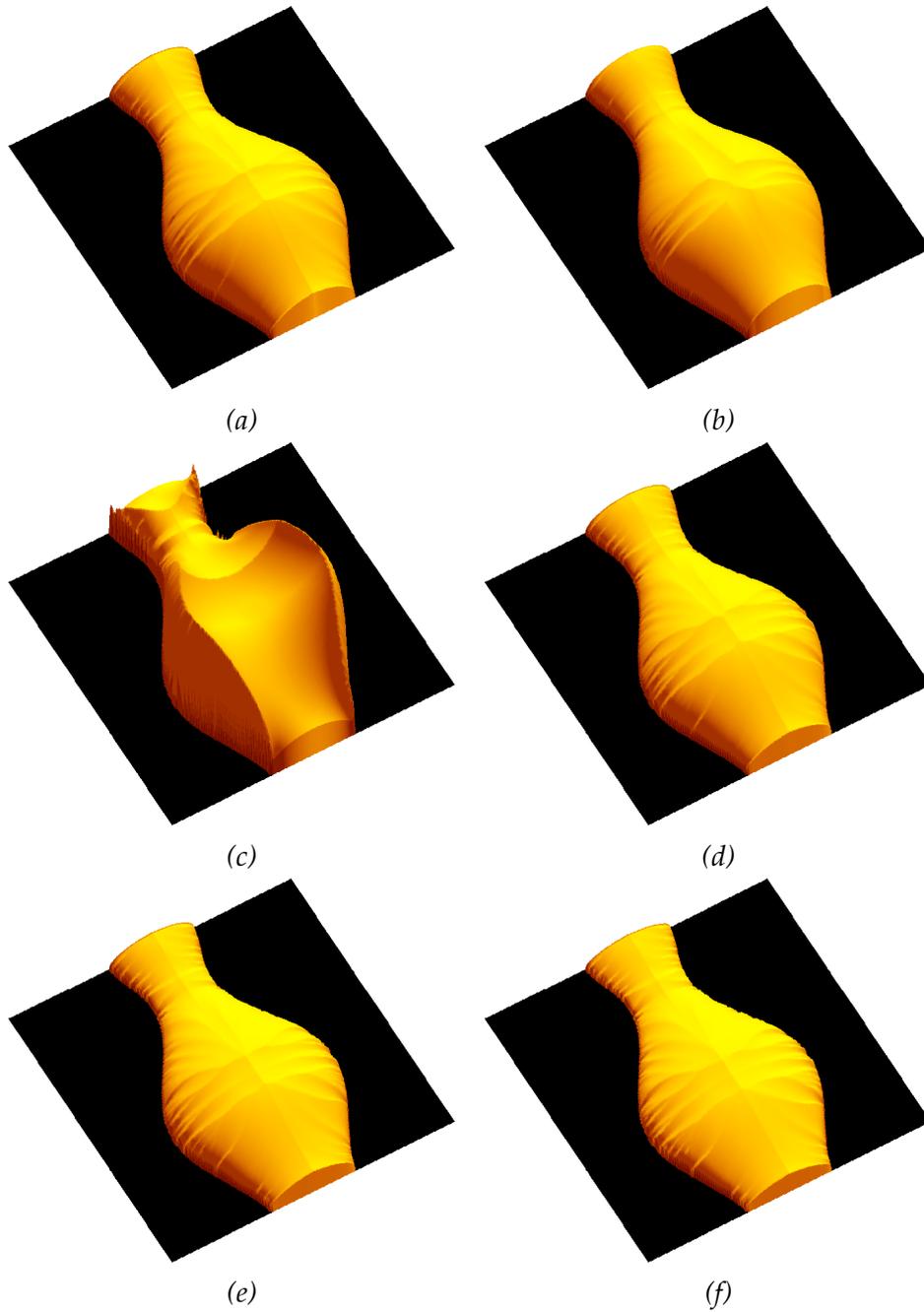


Figura 4.16: Immagini ricostruite del vaso sintetico generato con il modello di Lambert: (a) Ricostruita con il modello di Lambert. (b) Ricostruita con il modello di Oren-Nayar e $\sigma = 0.1$. (c) Ricostruita con il modello di Oren-Nayar e $\sigma = 0.3$. (d) Ricostruita con il modello di Phong $\alpha = 1$, $I_d = 0.9$ e $I_s = 0.1$. (e) Ricostruita con il modello di Phong $\alpha = 1$, $I_d = 0.8$ e $I_s = 0.2$. (f) Ricostruita con il modello di Phong $\alpha = 1$, $I_d = 0.7$ e $I_s = 0.3$.

Tabella 4.10: Valore L^∞ , L^1 e L^2 , ottenuti nella ricostruzione dall'immagine sintetica vaso, generata e ricostruita con modelli differenti. In colonna il modello di origine, sulle righe il modello usato per la ricostruzione. LA: modello di Lambert; O1, O3, O5: modello di Oren-Nayar, con valori di $\sigma = 0.1, 0.3, 0.5$; P1, P2, P3: modello di Phong con $\alpha = 1$ e valori di $I_s = 0.1, 0.2, 0.3$.

| | | origine | | | | | | | | |
|---------------|------------|---------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| | | LA | O1 | O3 | O5 | P1 | P2 | P3 | | |
| ricostruzione | L^∞ | LA | 0.0569 | 0.0909 | 0.1709 | 0.1864 | 0.0581 | 0.1437 | 0.2360 | |
| | | O1 | 0.0249 | 0.0572 | 0.2384 | 0.3411 | 0.1122 | 0.2099 | 0.3230 | |
| | | O3 | 0.7367 | 0.6062 | 0.0608 | 0.2544 | 0.9187 | 1.1538 | 1.4335 | |
| | | O5 | 1.3059 | 1.2351 | 0.4746 | 0.0535 | 1.5863 | 1.9562 | 2.4551 | |
| | | P1 | 0.1218 | 0.1494 | 0.2152 | 0.2245 | 0.0575 | 0.0528 | 0.1405 | |
| | | P2 | 0.1774 | 0.2023 | 0.2548 | 0.2587 | 0.1226 | 0.0560 | 0.0543 | |
| | | P3 | 0.2247 | 0.2471 | 0.2870 | 0.2858 | 0.1791 | 0.1237 | 0.0561 | |
| | | L^1 | LA | 0.0267 | 0.0485 | 0.0979 | 0.0979 | 0.0181 | 0.0596 | 0.1069 |
| | | | O1 | 0.0096 | 0.0271 | 0.1392 | 0.2032 | 0.0533 | 0.1023 | 0.1573 |
| | | | O3 | 0.2862 | 0.2414 | 0.0287 | 0.1472 | 0.3746 | 0.4585 | 0.5368 |
| | | | O5 | 0.5069 | 0.4988 | 0.2256 | 0.0235 | 0.5936 | 0.6732 | 0.7345 |
| | | | P1 | 0.0649 | 0.0852 | 0.1314 | 0.1332 | 0.0267 | 0.0192 | 0.0636 |
| | | | P2 | 0.0990 | 0.1176 | 0.1588 | 0.1608 | 0.0659 | 0.0265 | 0.0217 |
| | | | P3 | 0.1292 | 0.1457 | 0.1806 | 0.1812 | 0.1012 | 0.0680 | 0.0264 |
| | | L^2 | LA | 0.0286 | 0.0516 | 0.1049 | 0.1080 | 0.0232 | 0.0706 | 0.1235 |
| | | | O1 | 0.0118 | 0.0291 | 0.1490 | 0.2186 | 0.0613 | 0.1163 | 0.1779 |
| | | | O3 | 0.3461 | 0.2919 | 0.0307 | 0.1582 | 0.4415 | 0.5392 | 0.6391 |
| | | | O5 | 0.5995 | 0.5843 | 0.2561 | 0.0254 | 0.7090 | 0.8175 | 0.9123 |
| | | | P1 | 0.0695 | 0.0910 | 0.1400 | 0.1426 | 0.0286 | 0.0240 | 0.0743 |
| | | | P2 | 0.1065 | 0.1261 | 0.1693 | 0.1713 | 0.0705 | 0.0284 | 0.0266 |
| | | | P3 | 0.1390 | 0.1564 | 0.1926 | 0.1928 | 0.1086 | 0.0725 | 0.0283 |

Tabella 4.11: Valore L^∞ , L^1 e L^2 , ottenuti nella ricostruzione dall'immagine sintetica sfera, generata e ricostruita con modelli differenti. In colonna il modello di origine, sulle righe il modello usato per la ricostruzione. LA: Lambert; O1, O3, O5: Oren-Nayar, $\sigma = 0.1, 0.3, 0.5$; P1, P2, P3: Phong $I_s = 0.1, 0.2, 0.3$.

| | | origine | | | | | | | | |
|---------------|------------|---------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| | | LA | O1 | O3 | O5 | P1 | P2 | P3 | | |
| ricostruzione | L^∞ | LA | 0.0661 | 0.134 | 0.2824 | 0.3125 | 0.0922 | 0.2407 | 0.3248 | |
| | | O1 | 0.0848 | 0.0671 | 0.3978 | 0.5792 | 0.246 | 0.4345 | 0.5457 | |
| | | O3 | 1.5237 | 1.2409 | 0.0737 | 0.4257 | 1.9964 | 2.5860 | 2.9518 | |
| | | O5 | 2.8978 | 2.6578 | 1.1778 | 0.0617 | 3.6397 | 4.5993 | 5.1448 | |
| | | P1 | 0.1807 | 0.2365 | 0.3592 | 0.3784 | 0.0653 | 0.0960 | 0.1711 | |
| | | P2 | 0.2797 | 0.3289 | 0.4283 | 0.4378 | 0.1812 | 0.0669 | 0.0462 | |
| | | P3 | 0.3645 | 0.4076 | 0.4849 | 0.4853 | 0.2821 | 0.1290 | 0.0655 | |
| | | L^1 | LA | 0.0450 | 0.1043 | 0.2311 | 0.2464 | 0.0397 | 0.1329 | 0.1886 |
| | | | O1 | 0.0572 | 0.0455 | 0.2932 | 0.4140 | 0.1627 | 0.2912 | 0.3689 |
| | | | O3 | 1.2676 | 1.0486 | 0.0486 | 0.3023 | 1.6160 | 2.0265 | 2.2818 |
| | | | O5 | 2.1138 | 2.0015 | 0.9627 | 0.0404 | 2.5228 | 2.9934 | 3.2218 |
| | | | P1 | 0.1183 | 0.1731 | 0.2906 | 0.3073 | 0.0445 | 0.0452 | 0.0947 |
| | | | P2 | 0.1864 | 0.2362 | 0.3412 | 0.3565 | 0.1220 | 0.0445 | 0.0122 |
| | | | P3 | 0.2487 | 0.2929 | 0.3824 | 0.3936 | 0.1941 | 0.0871 | 0.0443 |
| | | L^2 | LA | 0.0472 | 0.1069 | 0.2364 | 0.2541 | 0.0478 | 0.1505 | 0.2109 |
| | | | O1 | 0.0597 | 0.0476 | 0.3051 | 0.4346 | 0.1726 | 0.3096 | 0.3919 |
| | | | O3 | 1.3044 | 1.0691 | 0.0509 | 0.3167 | 1.6795 | 2.1303 | 2.4163 |
| | | | O5 | 2.3069 | 2.1492 | 0.9797 | 0.0423 | 2.8155 | 3.4474 | 3.7855 |
| | | | P1 | 0.1256 | 0.1806 | 0.2993 | 0.3157 | 0.0465 | 0.0531 | 0.1074 |
| | | | P2 | 0.1985 | 0.2482 | 0.3532 | 0.3671 | 0.129 | 0.0467 | 0.0151 |
| | | | P3 | 0.2642 | 0.3081 | 0.3967 | 0.4061 | 0.2055 | 0.0915 | 0.0465 |

4.5 Conclusioni

Riprendendo quanto detto sulle immagini sintetiche, il metodo semilagrangiano, pur essendo più lento dei corrispettivi locali FM e FS, ci permette di ottenere risultati compatibili. Sebbene i risultati delle ricostruzioni effettuate con metodo semilagrangiano, a volte risultino peggiori rispetto a FM e FS (figura 4.10), ribadiamo che questa differenza possa invertirsi a seconda dell'immagine e dei parametri applicati. A titolo di esempio si può notare il caso del vaso sintetico generato con il modello P2 (Phong con $\alpha = 1$, $I_d = 0.8$ e $I_s = 0.2$, tabella 4.3) e della tenda canadese (tabella 4.5), sia nel caso LA (Lambertiano), che nello stesso caso P2. Per questa ragione possiamo concludere che, per i tre modelli, nel caso di immagini sintetiche, l'unica differenza riscontrata tra i metodi esaminati riguarda i tempi di esecuzione.

Per quanto concerne i test effettuati con le immagini reali, possiamo notare che i problemi di ricostruzione della superficie sono molto spesso legati alla condizione al bordo fornita. Un suggerimento potrebbe essere quello di implementare un metodo con condizioni al bordo di tipo Neumann, in modo da non mantenere necessariamente tutti i bordi dell'immagine fissati ad un valore predefinito. Questo aprirebbe la strada ad una maggiore quantità di immagini reali da utilizzare come test.

In relazione al modello generico, osservando quanto riprodotto in figura 4.16 (c), corrispondente al caso di ricostruzione con modello di Oren-Nayar ($\sigma = 0.1$) di un'immagine generata con il modello lambertiano, conveniamo che il vaso è stato ricostruito con una superficie che presenta una evidente ambiguità concavo/convessa, ma che comunque tale superficie, anche senza questa ambiguità, si sarebbe elevata ben oltre l'altezza di quella originale.

È chiaro che il modello di Oren-Nayar, a differenza degli altri, interpreta i contorni delle immagini in modo differente. Le zone meno luminose corrispondono a superfici più ripide. Per questa sua peculiarità il modello tende a ricostruire immagini lambertiane, o di Phong, con superfici che tendono ad allungarsi verso l'alto. Questo effetto è tanto più prominente quanto maggiore è il valore del parametro σ . Il risultato finale di questa caratteristica è una superficie ricostruita che presenta notevoli differenze con quella originaria. Inoltre, da un attento esame della figura 4.16, possiamo vedere che il modello di Oren-Nayar con $\sigma = 0.1$, pur ricostruendo bene, in alcuni casi, le superfici rappresentate con i modelli di Lambert e Phong, non raggiunge gli stessi risultati degli altri modelli nel ricostruire immagini originate con lo stesso modello di Oren-Nayar e con parametro di rugosità $\sigma > 0.1$. Queste argomentazioni, unite a quanto detto sui limiti di applicabilità del modello nel § 1.3.3, p. 16, ci portano ad osservare che il modello

di Oren-Nayar (soprattutto con valori del parametro $\sigma > 0.1$) si presta meno degli altri modelli ad essere utilizzato, nel caso di luce verticale, come modello generico, ovvero come modello per effettuare la ricostruzione di superfici delle quali non si abbia nessuna informazione utile per considerare più appropriato un modello specifico.

Bibliografia

- [1] M. Bardi and M. Falcone. An approximation scheme for the minimum time function. *SIAM J. Control Optim.*, 28(4):950–965, June 1990.
- [2] M. Breuß, E. Cristiani, J.D. Durou, M. Falcone, and O. Vogel. Perspective shape from shading: Ambiguity analysis and numerical approximations. 5(1 2012):311, 2012.
- [3] M. Breuß, O. Vogel, and J. Weickert. Efficient numerical techniques for perspective shape from shading. In *Algoritmy 2009 (Podbanske, Slovakia, March 2009)*, pages 11–20, Bratislava, SK, SK, 2009. Slovak University of Technology.
- [4] F. Camilli and M. Falcone. An approximation scheme for the maximal solution of the shape-from-shading model. In *Image Processing, 1996. Proceedings., International Conference on*, volume 1, pages 49–52 vol.1, September 1996.
- [5] F. Camilli and L. Grüne. Numerical approximation of the maximal solutions for a class of degenerate hamilton-jacobi equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 38(5):1540–1560, October 2000.
- [6] F. Camilli and A. Siconolfi. Maximal subsolutions for a class of degenerate hamilton-jacobi problems. *Indiana University Mathematics Journal*, 48(3):1111–1131, 1999.
- [7] E. Cristiani and M. Falcone. Fast semi-lagrangian schemes for the eikonal equation and applications. *SIAM J. Numer. Anal.*, 45(5):1979–2011, August 2007.
- [8] J.D. Durou, M. Falcone, and M. Sagona. Numerical methods for shape-from-shading: A new survey with benchmarks. *Comput. Vis. Image Underst.*, 109(1):22–43, January 2008.
- [9] M. Falcone and M. Sagona. An algorithm for the global solution of the shape-from-shading model. In *Proceedings of the 9th International Conference on Image Analysis and Processing-Volume I - Volume I, ICIAP '97*, pages 596–603, London, UK, UK, 1997. Springer-Verlag.

- [10] M. Falcone, M. Sagona, and A. Seghini. A scheme for the shape-from-shading model with black shadows. In *Numerical Mathematics and Advanced Applications*. Springer, 2003.
- [11] B.K.P. Horn. *Shape from Shading: A Method for Obtaining the Shape of a Smooth Opaque Object from One View*. PhD thesis, Massachusetts Inst. of Technology, 1970.
- [12] B.K.P. Horn and M.J. Brooks, editors. *Shape from Shading*. MIT Press, Cambridge, MA, USA, 1989.
- [13] Y.C. Ju, M. Breuß, A. Bruhn, and S. Galliani. Shape from shading for rough surfaces: Analysis of the oren-nayar model. In *Proceedings of the British Machine Vision Conference*, page 104.1–104.11. BMVA Press, 2012.
- [14] M. Oren and S.K. Nayar. Generalization of lambert’s reflectance model. In *Proceedings of the 21st Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques, SIGGRAPH ’94*, page 239–246, New York, NY, USA, 1994. ACM.
- [15] B.T. Phong. Illumination for computer generated pictures. *Commun. ACM*, 18(6):311–317, June 1975.
- [16] E. Prados and O. Faugeras. Shape from Shading: a well-posed problem? In *IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, CVPR’05*, volume 2, page 870–877. IEEE, 2005.
- [17] V.S. Ramachandran. Perception of shape from shading. *Nature*, 331(6152):163–166, jan 1988.
- [18] E. Rouy and A. Tourin. A viscosity solutions approach to shape-from-shading. *SIAM J. Numer. Anal.*, 29(3):867–884, June 1992.
- [19] J. A. Sethian. A fast marching level set method for monotonically advancing fronts. In *Proc. Nat. Acad. Sci*, pages 1591–1595, 1995.
- [20] J.A. Sethian. *Level Set Methods and Fast Marching Methods: Evolving Interfaces in Computational Geometry, Fluid Mechanics, Computer Vision, and Materials Science*. Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics. Cambridge University Press, 1999.
- [21] O. Vogel, M. Breuß, T. Leichtweis, and J. Weickert. Fast shape from shading for phong-type surfaces. In Xue-Cheng Tai, Knut Mørken, Marius Lysaker, and Knut-Andreas Lie, editors, *SSVM*, volume 5567 of *Lecture Notes in Computer Science*, page 733–744. Springer, 2009.

- [22] O. Vogel and E. Cristiani. Numerical schemes for advanced reflectance models for shape from shading. In B. Macq and P. Schelkens, editors, *ICIP, ICIP '11*, page 5–8. IEEE, 2011.
- [23] R. Zhang, P.S. Tsai, J.E. Cryer, and M. Shah. Shape-from-shading: a survey. *Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on*, 21(8):690–706, 1999.
- [24] Y. Zhang, H. Zhao, and S. Chen. Fixed-point iterative sweeping methods for static hamilton-jacobi equations. *Methods and Applications of Analysis*, 13(3):299–320, September 2006.
- [25] H. Zhao. A fast sweeping method for eikonal equations. *Math. Comput.*, 74(250):603–627, 2005.