PROGETTO OLIMPIADI - sezione di Roma

gara individuale del 29 marzo 2001

dipartimenti di Matematica delle Università di Roma I e Roma III

con il contributo dell'Unione Matematica Italiana

(1) Trovare un numero intero positivo di 26 cifre (nell'abituale scrittura decimale), che sia il cubo di un numero intero.

(2) Dato l'intero positivo n, indichiamo con il simbolo $n!$ il prodotto di tutti gli interi positivi non maggiori di n. Ad esempio, abbiamo che $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$. Stabilire, giustificando la risposta, per quali valori di n il numero $(2n)!$ è multiplo di $(n!)^2$.

(3) Definiamo la due successioni di interi $a(k)$ e $b(k)$ nel modo seguente: per ogni intero positivo k

$$(2+\sqrt{3})^k = a(k) + b(k)\sqrt{3}.$$

Ad esempio, dato che $(2+\sqrt{3})^2 = 7 + 4\sqrt{3}$, abbiamo $a(2) = 7$ e $b(2) = 4$. Dimostrare che, per ogni intero positivo k, il numero $a(k)+b(k)$ è dispari. (Si suggerisce di scrivere una relazione che leghi i numeri $a(k+1)$ e $b(k+1)$ con $a(k)$ e $b(k)$).

(4) Due rette r e s si intersecano in un punto O, delimitando due angoli acuti e due ottusi. Sia A un punto in uno degli angoli ottusi e sia B un punto in uno degli angoli acuti. Supponiamo inoltre che l'angolo $A\hat{O}B$ sia acuto. Chiamiamo M e N i piedi delle perpendicolari condotte da A alle due rette r e s, rispettivamente. Chiamiamo K e L i piedi delle perpendicolari condotte da B alle due rette r e s, rispettivamente. Dimostrare che l'ampiezza dell'angolo acuto formato dalle rette MN e KL è uguale a quella di $A\hat{O}B$. (Si suggerisce di individuare degli opportuni quadrilateri che siano inscritti in circonferenze).