PROGETTO OLIMPIADI - sezione di Roma

gara a squadre del 29 marzo 2001

dipartimenti di Matematica delle Università di Roma I e Roma III

con il contributo dell'Unione Matematica Italiana

(1) Fra pochi mesi useremo le monete in euro. Saranno messe in circolazione monete da: 1 centesimo, 2 centesimi, 5 centesimi, 10 centesimi, 20 centesimi, 50 centesimi, 1 euro, 2 euro. Immaginiamo che, per eseguire un acquisto in euro di un oggetto il cui costo è maggiore di 1 euro, ho dato due monete diverse e ho ricevuto, come resto, altre due monete diverse fra loro e diverse dalle due che avevo dato. Qual è , al minimo, il prezzo dell'oggetto che ho acquistato ?

A. 1.01 euro

B. 1.02 euro

C. 1.03 euro

D. 1.05 euro

E. 1.07 euro

(2) Su una circonferenza di raggio 1, siano D, E e F tre punti che separano tre archi le cui lunghezze sono proporzionali ai numeri 3, 4 e 5. Tracciamo le tangenti alla circonferenza nei punti D, E e F. Indicare l'area del triangolo delimitato da queste tre tangenti.

A. 12

B. $3 + 2\sqrt{3}$

C. 2π

D. $(1 + \sqrt{3})^2$

E. nessuna delle risposte precedenti

(3) Sia n un intero positivo. Allora abbiamo:

A. è impossibile che $n(n+1)$ sia un quadrato

B. $n(n+1)$ è un quadrato se e solo se n non è un numero primo.

C. $n(n+1)$ è un quadrato se e solo se n è un numero divisibile per 4

D. $n(n+1)$ è un quadrato se e solo se n è un numero primo

E. nessuna delle risposte precedenti

(4) In un sistema di riferimento cartesiano, consideriamo le quattro semicirconferenze che passano per l'origine ed i cui estremi sono, rispettivamente, le coppie di punti seguenti: la coppia $(1, 0)$ e $(0, 1)$, la coppia $(0, 1)$ e $(-1, 0)$, la coppia $(-1, 0)$ e $(0, -1)$, la coppia $(0, -1)$ e $(1, 0)$. Indicare l'area della figura piana delimitata da queste quattro semicirconferenze.

A. $\pi - 2$

B. $2\pi - 4$

C. $4\pi - 8$

D. $4 - \pi$

E. nessuna delle risposte precedenti

(5) Consideriamo un poligono regolare $\mathcal{P}$. Immaginiamo di aver dipinto con un colore ciascun lato e ciascuna diagonale di $\mathcal{P}$, usando i due colori rosso e blu. Diremo che tre vertici di $\mathcal{P}$ formano un triangolo monocromatico se i tre segmenti che li uniscono sono tutti dello stesso colore. Allora si ha che:

A. se il poligono $\mathcal{P}$ è un pentagono, sicuramente uno dei triangoli ottenuti non è monocromatico

B. se il poligono $\mathcal{P}$ è un esagono, sicuramente tre dei triangoli ottenuti sono monocromatici

C. se il poligono $\mathcal{P}$ è un pentagono, sicuramente uno dei triangoli ottenuti è monocromatico

D. se il poligono $\mathcal{P}$ è un esagono, sicuramente uno dei triangoli ottenuti è monocromatico

E. nessuna delle risposte precedenti

(6) Siano k e n due numeri interi positivi. Consideriamo un insieme formato da k numeri interi positivi distinti, tutti compresi fra 1 e $2n$. Allora abbiamo:

A. se $2 < k < n$, allora, comunque vengano scelti i k numeri, il loro MCD è maggiore di 1

B. se $k = n$, allora, comunque vengano scelti i k numeri, il loro MCD è 1

C. se $k = n$, allora, in qualunque modo vengano scelti i k numeri, il loro MCD è maggiore di 1

D. se $k = n + 1$, allora, comunque vengano scelti i k numeri, il loro MCD è 1.

E. nessuna delle risposte precedenti

(7) Dato un triangolo isoscele ABC, sia M un punto sulla base AB, con $\overline{AM} = a$ e $\overline{MB} = b$. Consideriamo le circonferenze inscritte nei triangoli AMC e MBC, e siano H e K i punti di tangenza del segmento CM con queste due circonferenze. Indicare la lunghezza del segmento HK.

A. $\overline{HK} = \dfrac{|b-a|}{2}$

B. $\overline{HK} = |b-a|$

C. $\overline{HK} = \sqrt{|b^2 - a^2|}$

D. $\overline{HK} = \dfrac{|b+a|}{4}$

E. le informazioni fornite non bastano, poiché $\overline{HK}$ cambia al variare del lato AC

(8) Carlo è un buon tiratore e, ad ogni tentativo, ha una certa probabilità p di riuscire a colpire il bersaglio. Stabilire quanto vale p, sapendo che, in tre tentativi, la probabilità che Carlo colpisca almeno una volta il bersaglio è 0.992.

A. $p = 0.80$

B. $p = 0.84$

C. $p = 0.88$

D. $p = 0.92$

E. $p = 0.98$

(9) Dato l'intero positivo n, chiamiamo $P_n(x)$ il polinomio

$$P_n(x) = (3 - 2x - 3x^2)^n.$$

Ad esempio, abbiamo $P_2(x) = (3-2x-3x^2)^2 = 9-12x-14x^2+12x^3+9x^4$. Indichiamo con G_n la somma di tutti i coefficienti dei termini di grado pari del polinomio $P_n(x)$ (compreso il termine noto). Ad esempio, abbiamo $G_2 = 9 - 14 + 9 = 4$. Allora si ha:

A. $G_{21} = 42$

B. $G_{21} = 2^{21}$

C. $G_{21} = 2^{20} + 2$

D. $G_{21} = 0$

E. nessuna delle risposte precedenti

(10) I vertici A, B e C di un triangolo equilatero sono vertici anche di un trapezio $ABCD$, di basi AB e CD. L'area di questo trapezio è tripla di quella del triangolo ABC. Indicare l'ampiezza dell'angolo $C\hat{D}A$.

A. $30°$

B. $60°$

C. $90°$

D. $120°$

E. le informazioni fornite non bastano per stabilirlo

(11) Siano n e p due numeri naturali, con p numero primo dispari. Per quali valori di n e p abbiamo che $n^2 + p^3$ è un quadrato ?

A. solo per $n = p = 3$

B. solo in due casi: $n = p = 3$, oppure $p = 5$ e $n = 10$

C. per ogni primo p esiste esattamente un valore di n con tale proprietà

D. per ogni primo p esistono esattamente due valori di n con tale proprietà

E. nessuna delle risposte precedenti

(12) Nello spazio tridimensionale, sono dati quattro punti P, Q, R, S, in modo che si abbia $\overline{PQ} = \overline{QR} = \overline{RS} = \overline{SP} = \overline{PR} = 1\ m$. Stabilire la lunghezza di QS.

A. $\overline{QS} = 1\ m$

B. $\overline{QS} = \sqrt{2}\ m$

C. $\overline{QS} = \sqrt{3}\ m$

D. $\overline{QS} = 2\ m$

E. le informazioni fornite non permettono di stabilirlo

(13) Dato un intero $m > 2$, indichiamo con il simbolo $P(m)$ il numero

$$P(m) = 4^m - m^4.$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera ?

A. per ogni $m > 2$, il modulo di $P(m)$ è un numero primo

B. per ogni $m > 2$, il numero $P(m)$ è pari

C. il modulo di $P(m)$ è un numero primo se e solo se $m = 3$

D. se m è dispari, allora il modulo di $P(m)$ è un numero primo

E. nessuna delle risposte precedenti

(14) Alice e Bernardo fanno il seguente gioco: uno dei due lancia un dado a sei facce (numerate da 1 a 6). Se esce il 4, colui che ha lanciato il dado vince, altrimenti tocca all'altro lanciare il dado. Il gioco continua fino a quando uno dei due non fa 4. Inizia a lanciare Alice. Indicare la probabilità che sia Alice a vincere.

A. 2/3

B. 7/12

C. 6/11

D. 3/4

E. nessuna delle risposte precedenti

(15) E' dato un triangolo ABC. Sia s una retta passante per il baricentro O del triangolo e non passante per nessuno dei vertici A, B e C. Supponiamo che A e B si trovino nello stesso semipiano rispetto a s, mentre C è nell'altro semipiano. Siano AP, BQ, CR le perpendicolari condotte dai vertici alla retta s. Quale relazione vale tra $\overline{CR}$ e la somma $\overline{AP} + \overline{BQ}$?

A. sicuramente $\overline{AP} + \overline{BQ} < \overline{CR}$

B. sicuramente $\overline{AP} + \overline{BQ} = \overline{CR}$

C. sicuramente $\overline{AP} + \overline{BQ} > \overline{CR}$

D. tale relazione varia in base alla retta s e alle dimensioni del triangolo ABC

E. tale relazione varia in base alle dimensioni del triangolo ABC ma non dipende da come si sceglie la retta s

(16) L'isola di Smullyan è abitata da due tipi di persone: ci sono i bugiardi, che mentono sempre, ed i sinceri, che dicono sempre la verità . Fra tre degli abitanti dell'isola, i cui nomi sono X, Y e Z, si svolge il seguente dialogo:

X dice: "tra noi c'è almeno un bugiardo"
Y dice: "tra noi c'è non più di un bugiardo"
Z dice: "tra noi c'è esattamente un bugiardo".

Che cosa si può dedurre a proposito di questi tre abitanti ?

A. fra loro non ci sono bugiardi

B. fra loro c'è esattamente un bugiardo

C. fra loro ci sono esattamente due bugiardi

D. sono tutti e tre bugiardi

E. questo dialogo non permette di stabilire quanti dei tre abitanti siano bugiardi