PROGETTO OLIMPIADI - sezione di Roma

gara individuale del 29 marzo 2001

dipartimenti di Matematica delle Università di Roma I e Roma III

con il contributo dell'Unione Matematica Italiana

(1) Ad esempio, il numero $(3 \cdot 10^8)^3 = 27 \cdot 10^{24}$.

(2) Per ogni intero positivo n, il numero $(2n)!$ è divisibile per $(n!)^2$. Basta verificare che $n!$ divide il prodotto degli interi da $n+1$ a $2n$. Si vede subito che ogni potenza di primo p^k che compare come fattore nel prodotto degli interi da 1 a n, compare poi almeno altrettante volte nel prodotto degli interi da $n+1$ a $2n$ (che è un intervallo di interi della stessa lunghezza). Aggiungiamo, inoltre, che $\frac{(2n)!}{(n!)^2}$ è il numero dei sottoinsiemi formati da n elementi in un insieme che ha $2n$ elementi, ovvero il coefficiente centrale nella $2n$-esima riga del triangolo di Tartaglia.

(3) Dato che

$$\begin{aligned}(2+\sqrt{3})^{k+1} &= (2+\sqrt{3})^k \cdot (2+\sqrt{3}) = (\, a(k) + b(k)\sqrt{3}\,) \cdot (2+\sqrt{3}) \\ &= (\, 2a(k) + 3b(k)\,) \ + \ (\, a(k) + 2b(k)\,)\,\sqrt{3},\end{aligned}$$

si ha che $a(k+1) = 2a(k) + 3b(k)$ e $b(k+1) = a(k) + 2b(k)$. Segue che, se $a(k)$ è pari e $b(k)$ dispari, allora $a(k+1)$ è dispari e $b(k+1)$ pari. Allo stesso modo, se $a(k)$ è dispari e $b(k)$ pari, allora $a(k+1)$ è pari e $b(k+1)$ dispari. Dato che $a(1) = 2$ e $b(1) = 1$, si ha che $a(k)$ e $b(k)$ sono sempre uno pari e l'altro dispari e quindi la loro somma è dispari.

(4) I quadrilateri convessi $OAMN$ e $OBKL$ sono inscritti nelle circonferenze di diametri OA e OB. Segue che $A\hat{O}N = A\hat{M}N$ e $L\hat{O}B = L\hat{K}B$. Sia P il punto d'incontro delle rette MN e KL (che, naturalmente, non possono essere parallele). Sia Q la proiezione di P sulla retta r. Si verifica subito che il punto Q cade fra M e K. Inoltre, abbiamo queste uguaglianze di angoli alterni interni: $A\hat{M}N = M\hat{P}Q$ e $B\hat{K}L = K\hat{P}Q$. Pertanto, si ottiene:

$$A\hat{O}B = A\hat{O}N + L\hat{O}B = A\hat{M}N + B\hat{K}L = M\hat{P}Q + Q\hat{P}K = M\hat{P}K.$$

Osserviamo, infine, che l'enunciato è valido anche se le rette r e s sono ortogonali e anche senza le ipotesi che abbiamo fatto sulle posizioni dei punti A e B, come si vede facilmente con lo stesso tipo di ragionamento.