PROGETTO OLIMPIADI - sezione di Roma

gara a squadre del 29 marzo 2001

dipartimenti di Matematica delle Università di Roma I e Roma III

con il contributo dell'Unione Matematica Italiana

(1) La risposta è **A**. Nelle condizioni descritte, la spesa minima consiste nel dare 2 euro e 2 centesimi, ricevendo per resto 1 euro e 1 centesimo.

(2) La risposta è **B**. Sia O il centro della circonferenza. Assumiamo che DF sia l'arco di lunghezza proporzionale a 3 e ED quello proporzionale a 4. Inoltre, indichiamo con d, e, f i lati del triangolo, tangenti rispettivamente in D, E, F. Dal fatto che risulta $3/(3+4+5) = 1/4$ e $4/(3+4+5) = 1/3$, deriva che $D\hat{O}F = 90°$ ed $E\hat{O}D = 120°$. Questo comporta che il triangolo di lati d, e, f è rettangolo e che l'angolo opposto a f è di 60°. Dunque si tratta della metà di un triangolo equilatero. Per trovarne l'area basta quindi calcolare la lunghezza di d, da cui si ricavano tutte le misure del triangolo.

(3) La risposta è **A**. Infatti, due numeri consecutivi sono sempre primi fra loro (qualunque divisore comune ai due numeri deve dividere anche la loro differenza, ovvero non può che essere 1). Quindi, se il prodotto $n(n + 1)$ fosse un quadrato, gli interi positivi n e $n + 1$ dovrebbero essere ambedue dei quadrati, il che è impossibile. Si può segnalare che questo fatto è il caso più semplice di un teorema dimostrato da Erdos e Selfridge, secondo cui nessun prodotto di più interi consecutivi è una potenza con base intera ed esponente maggiore di 1.

(4) La risposta è **A**. Il raggio delle quattro semicirconferenze è lungo $\sqrt{2}/2$. Ciascuna delle quattro regioni disposte "a quadrifoglio" è il doppio di un segmento circolare avente per arco 1/4 di circonferenza. Dunque, possiamo trovare l'area di quattro di tali segmenti circolari come differenza tra l'area del cerchio e l'area del quadrato inscritto, che ha lato di lunghezza 1. Quindi la metà dell'area richiesta è $\frac{\pi}{2} - 1$.

(5) La risposta è **D**. Escludiamo la risposta A poiché i segmenti potrebbero avere tutti lo stesso colore. Le risposte B e C sono eliminate dal fatto che possiamo colorare di rosso tutti lati e di blu tutte le diagonali. Facciamo, vedere che invece l'affermazione D è corretta. Prendiamo in considerazione uno dei vertici di $\mathcal{P}$, dal quale usciranno 5 segmenti colorati. Uno dei due colori sarà usato in almeno 3 di tali segmenti, ad esempio il rosso. Adesso consideriamo il triangolo formato dagli altri tre estremi di questi segmenti. O questo triangolo è monocromatico blu, oppure uno dei lati è rosso. In entrambi i casi si trova un triangolo monocromatico. Il contenuto di questo enunciato può essere migliorato: si può dimostrare che, in effetti, un esagono possiede sempre almeno due triangoli monocromatici.

(6) La risposta è **D**. Infatti, in questo caso, almeno due dei numeri scelti dovranno essere consecutivi, quindi essi saranno primi fra loro. Si vede facilmente che tutte le altre affermazioni sono false (ad esempio, per escludere la B, basta prendere tutti i numeri pari compresi fra 1 e $2n$).

(7) La risposta è **A**. Si tratta di utilizzare ripetutamente il fatto che i due segmenti delle tangenti condotte da un punto esterno a una circonferenza hanno la stessa lunghezza.

(8) La risposta è **A**. Sia $x = 1 - p$ la probabilità che Carlo fallisca il bersaglio in un singolo tiro. Dai dati forniti, si ha che $x^3 = 8/1000$, da cui $x = 2/10$, quindi $p = 0.80$.

(9) La risposta è **D**. L'osservazione fondamentale è l'uguaglianza $P_n(1) + P_n(-1) = 2G_n$, indipendentemente da quale sia il particolare polinomio che consideriamo. Infatti, $P_n(1)$ fornisce la somma di tutti i coefficienti del polinomio $P_n(x)$, mentre $P_n(-1)$ è la somma dei coefficienti presi a segni alternati. Da questo, si ricava

$$G_n = \frac{P_n(1) + P_n(-1)}{2} \,.$$

Dato che, sostituendo i valori 1 e -1 direttamente nella formula che definisce $P_n(x)$, si trova $P_n(1) = (-2)^n$ e $P_n(-1) = 2^n$, otteniamo che $G_n = \dfrac{(-2)^n + 2^n}{2}$. In particolare, si ha $G_{21} = \dfrac{-2^{21} + 2^{21}}{2} = 0$.

(10) La risposta è **A**. L'area del triangolo ACD è doppia dell'area di ABC, quindi la base CD è doppia di AB. Sia P il punto medio di CD. Il triangolo ACP è equilatero, perciò il triangolo isoscele APD ha l'angolo in P di 120°.

(11) La risposta è **D**. Sia $n^2 + p^3 = m^2$, ovvero

$$p^3 = m^2 - n^2 = (m - n)(m + n).$$

I casi possibili sono quindi due: se $m - n = 1$, allora $m + n = p^3$, da cui $n = \dfrac{p^3 - 1}{2}$, che soddisfa la condizione assegnata. Altrimenti, si può scegliere $m - n = p$ e $m + n = p^2$, da cui $n = \dfrac{p(p-1)}{2}$, anch'esso soddisfacente alla condizione assegnata. Osserviamo infine che, dato il primo dispari p, questi due valori di n sono sempre diversi fra loro.

(12) La risposta è **E**. Se i quattro punti fossero complanari, essi sarebbero i vertici di un rombo $PQRS$. Tuttavia, si vede subito che possiamo far ruotare il triangolo PRS intorno al lato PR, senza che nessuna delle lunghezze assegnate cambi, mentre la lunghezza di QS varia.

(13) La risposta è **C**. Abbiamo $P(3) = 64 - 81 = -17$ e $P(4) = 0$. Inoltre, si ha:

$$4^m - m^4 = (2^m - m^2)(2^m + m^2).$$

Per $m \geqslant 5$, si ha che $2^m - m^2 > 1$: questo fornisce una fattorizzazione non banale di $P(m)$. Questo esclude D. Infine, le alternative A e B possono essere facilmente eliminate.

(14) La risposta è **C**. Chiamiamo a la probabilità che vinca Alice, b la probabilità che vinca Bernardo e x la probabilità che il gioco vada avanti all'infinito. Si vede subito che $x = 0$. Infatti, la probabilità che il gioco prosegua per almeno n lanci è $(5/6)^n$. Quindi x deve essere più piccolo di tutti i numeri del tipo $(5/6)^n$ (con n intero positivo), e dunque x non può essere positivo, ovvero $x = 0$. Questo implica che sia $a + b = 1$. Inoltre, una volta

che Alice non ha realizzato 4 al suo primo lancio, la probabilità di vincere di Bernardo è la stessa che aveva Alice all'inizio del gioco, dato che diventa lui il primo a giocare ed il gioco si svolge nello stesso modo. Da questo segue che

$$b = \frac{5}{6}\,a$$

(5/6 è la probabilità che il primo lancio di Alice vada male). Pertanto, si ha l'uguaglianza $a + (5/6)a = 1$, da cui $a = 6/11$.

(15) La risposta è **B**. Per verificare questo fatto, basta introdurre un sistema di assi cartesiani ortogonali in modo che il baricentro O sia l'origine e la retta s sia l'asse y. Come noto, le coordinate x e y del baricentro di un triangolo sono le medie delle coordinate x e y dei tre vertici. In particolare, dal fatto che la coordinata x del baricentro è 0, visto che A e B sono nello stesso semipiano rispetto a s, abbiamo che la somma $\overline{AP} + \overline{BQ}$ deve bilanciare $\overline{CR}$.

(16) La risposta è **C**. In primo luogo, osserviamo che X non può essere bugiardo (altrimenti direbbe il vero). Di conseguenza X è sincero, quindi deve esserci almeno un bugiardo fra Y e Z. Se soltanto uno di loro fosse bugiardo, direbbero il vero sia Y sia Z, i quali sarebbero dunque sinceri. Perciò , Y e Z devono essere entrambi bugiardi.