PROGETTO OLIMPIADI - sezione di Roma 11 aprile 2002

QUESITI DELLA GARA INDIVIDUALE DI MATEMATICA

dipartimenti di Matematica delle Università “La Sapienza” e Roma Tre

con il contributo dell’Unione Matematica Italiana

- (1) Dato un rettangolo $PQRS$ e detto M il punto medio del lato RS , tracciare i segmenti SQ e PM ed indicare con K il loro punto d’intersezione. Dimostrare che il punto K divide ciascuno dei segmenti SQ e PM in due parti che sono una doppia dell’altra.
- (2) Scrivere tutte le sequenze in cui possono essere disposte le sei cifre 1, 1, 2, 2, 3, 3 in modo che, in mezzo a ciascuna coppia di cifre uguali, non compaia nessuna cifra di valore più piccolo di tali due cifre. In ciascuna delle sequenze vanno utilizzate tutte le sei cifre (per fare un esempio, una delle sequenze ammesse è 3 3 1 2 2 1).
- (3) Una circonferenza ha esattamente un punto in comune con ciascun lato di un poligono avente un numero dispari di lati. Nessuno dei vertici di questo poligono appartiene alla circonferenza. Dimostrare che almeno uno dei lati del poligono è tangente alla circonferenza.
- (4) Fissato un intero positivo n , consideriamo tutte le coppie di numeri di tipo (a, b) con $a < b$, dove a e b sono interi positivi minori di n . Dimostrare che (qualunque sia n), fra tali coppie (a, b) , ce ne sono tante con $2a > b$ quante sono quelle con $2a < b$.
- (5) Sia ABC un triangolo e sia I il suo incentro, vale a dire il punto in cui si incontrano le bisettrici dei suoi tre angoli interni. Indichiamo con γ la circonferenza circoscritta ad ABC . Dimostrare che il centro della circonferenza passante per B , C e I appartiene a γ ed è allineato con A e I .