PROGETTO OLIMPIADI - sezione di Roma 11 aprile 2002

QUESITI DELLA GARA DI MATEMATICA A SQUADRE

dipartimenti di Matematica delle Università "La Sapienza" e Roma Tre

con il contributo dell'Unione Matematica Italiana

(1) Dato un rettangolo di base $2\,cm$ e altezza $0.95\,cm$, quanti sono i triangoli equilateri di lato $1\,cm$ con tutti i tre vertici sui lati del rettangolo ?

A. nessuno

B. 2

C. 4

D. 8

E. nessuna delle risposte precedenti

(2) Per distrarre i propri sudditi, un sovrano stabilisce di modificare la scrittura delle cifre usate per la numerazione, sostituendole con altri 10 simboli. Indicare a quale cifra corrisponde il simbolo $\heartsuit$, sapendo che le seguenti addizioni sono corrette:

$$\triangle\heartsuit + \triangle\clubsuit = \nabla\diamondsuit \qquad \diamondsuit + \spadesuit = \triangle\heartsuit \qquad \clubsuit + \nabla\spadesuit = \bigstar\circledast$$

A. 2

B. 4

C. 6

D. 8

E. nessuna delle risposte precedenti

(3) Il numero 2002 è palindromo, nel senso che se leggiamo le cifre da destra verso sinistra otteniamo il medesimo numero. Nel Paese dei Pari, usano il nostro stesso calendario, ma scrivono i numeri in forma binaria. Tuttavia, per abbreviare la scrittura delle date, si limitano e riportare *esattamente* le ultime n cifre che indicano gli anni, dove n è un certo numero pari (possono eventualmente esserci anche degli zeri all'inizio di questo blocco di cifre). Sapendo che anche nel Paese dei Pari l'anno in corso ha una scrittura palindroma, cosa si può dire sul valore di n ?

A. $n = 2$

B. $n = 4$

C. $n = 6$

D. $n = 8$

E. nessuna delle risposte precedenti

(4) In questo esercizio, chiamiamo numeri primi *formidabili* quei primi p, tali che $p - 1 = n^k$, dove n è un numero intero e k un intero **dispari** maggiore di 1. Quanti primi formidabili esistono ?

A. nessuno

B. 1

C. 2

D. infiniti

E. nessuna delle risposte precdenti

(5) Un'urna contiene alcune palline bianche ed alcune palline nere. Si sa che, sorteggiando contemporaneamente 2 palline, c'è la stessa probabilità di estrarre 2 palline entrambe nere oppure 2 palline di colore diverso. Tra le seguenti possibili combinazioni, qual è il contenuto dell'urna ?

A. contiene 1 pallina bianca e 3 palline nere

B. contiene 1 pallina bianca e 2 palline nere

C. contiene 1 pallina bianca e 4 palline nere

D. contiene 2 palline bianche e 2 palline nere

E. nessuna delle risposte precedenti

(6) Siano A e B due punti del piano distanti $\sqrt{2}\,\pi$. Chiamiamo $\mathcal{L}$ l'insieme dei punti P nel piano, tali che la minima fra le due distanze di P dai punti A e B sia π. Indicare la lunghezza della curva $\mathcal{L}$.

A. $4\pi^2$

B. $3\pi^2$

C. 3π

D. 3

E. nessuna delle risposte precedenti

(7) Quante sono le **coppie** di valori interi dei parametri h e k, tali che le radici dell'equazione $x^2 + (19 - hk)\,x + 3k = 0$ sono due numeri primi (positivi) ?

A. nessuna

B. 1

C. 2

D. infinite

E. nessuna delle risposte precedenti

(8) Siano x e y numeri reali positivi con $x \cdot y = 5$. Qual è il valore minimo che può assumere l'espressione $(x + y)^2$?

A. 5

B. 10

C. 20

D. 25

E. nessuna delle risposte precedenti

(9) Dato un triangolo ABC, prendiamo due punti P e Q sul lato BC. Da ciascuno di essi, si tracciano le parallele ai lati AC e AB, ottenendo una suddivisione del triangolo ABC in 6 parti: 3 triangoli e 3 parallelogrammi. Che cosa succede alle aree di questi 6 poligoni, se

facciamo scorrere il segmento PQ lungo il lato BC, in modo che la sua lunghezza rimanga costante ?

A. la somma delle aree dei 3 triangoli rimane costante

B. l'area del parallelogramma con vertice in A rimane costante

C. la somma delle aree dei 2 triangoli con vertici in B e in C rimane costante

D. la somma delle aree dei 2 parallelogrammi con vertici in P e in Q rimane costante

E. nessuna delle risposte precedenti

(10) Quale delle seguenti disuguaglianze vale per ogni intero positivo m ?

A. $4m^3 + 49 \geqslant (m+1)^4$

B. $m^4 + 15 \leqslant (m+1)^4$

C. $m^4 + 8 \geqslant (m+1)^4$

D. $m^4 + 1000 \geqslant (m+1)^4$

E. nessuna delle risposte precedenti

(11) Nello spazio, in cui è collocata una piramide a base quadrata, vi è un punto P colorato con un inchiostro speciale, visibile soltanto a una persona. Puoi vedere la piramide ma non il punto P. Il tuo scopo è di stabilire più rapidamente possibile se il punto P è interno o esterno o sul bordo della piramide. Ogni mossa che puoi fare consiste in questo: puoi scegliere un piano nello spazio; la persona in grado di riconoscere il punto P ti dice da che parte si trova P rispetto al piano che hai scelto, o se sta sul piano medesimo. Se adotti una buona strategia, qual è il numero minimo di mosse M tale che, qualunque sia la posizione di P, puoi esser certo che saprai entro M mosse dove si trova P (rispetto alla piramide) ?

A. $M = 2$

B. $M = 3$

C. $M = 4$

D. $M = 5$

E. non c'è modo di stabilirlo

(12) Consideriamo un triangolo rettangolo ABC ed il suo cerchio inscritto. Il segmento PQ sia la proiezione ortogonale di tale cerchio sull'ipotenusa AB. Che ampiezza ha l'angolo $P\widehat{C}Q$?

A. $30°$

B. $36°$

C. $45°$

D. $60°$

E. l'ampiezza dipende dalla forma del triangolo ABC

(13) Dato un cerchio $\mathcal{C}$ di centro O e diametro $\overline{AB} = 2r$, siano $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ i due cerchi di diametri AO e OB. Indichiamo, inoltre, con $\mathcal{C}_3$ e $\mathcal{C}_4$ i due cerchi tangenti a tutti e tre i cerchi $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$. Trovare l'area della parte di $\mathcal{C}$ che non appartiene a nessuno dei cerchi $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$, $\mathcal{C}_4$.

A. $(5/18)\ \pi r^2$

B. $(1/4)\ \pi r^2$

C. $(8/25)\ \pi r^2$

D. $(1/3)\ \pi r^2$

E. nessuna delle risposte precedenti

(14) In un mercato di pietre preziose si fanno affari per baratto. Sapendo che 1 smeraldo equivale a 3 turchesi e che 2 rubini valgono meno di 1 turchese e 1 smeraldo presi assieme, individuare fra questi il gruppo di pietre più prezioso.

A. 3 smeraldi

B. 2 smeraldi e 2 turchesi

C. 1 smeraldo e 3 rubini

D. 1 smeraldo, 1 turchese e 1 rubino

E. 4 rubini e 1 turhese

(15) I divisori positivi del numero 12 sono 1, 2 , 3, 4, 6, 12. Il loro prodotto è 1728. Cosa si ottiene moltiplicando tutti i divisori positivi del numero 400 ?

A. 400^7

B. 400^8

C. 400^{15}

D. 20^{15}

E. nessuna delle risposte precedenti