PROGETTO OLIMPIADI - sezione di Roma 11 aprile 2002

RISPOSTE AI QUESITI DELLA GARA DI MATEMATICA A SQUADRE

dipartimenti di Matematica delle Università "La Sapienza" e Roma Tre

con il contributo dell'Unione Matematica Italiana

(1) La risposta è **C**. Siano, nell'ordine, A, B, C, D i vertici del rettangolo, con AB e CD le basi di lunghezza $2\,cm$. L'altezza di un triangolo equilatero avente lato $1\,cm$ è $\sqrt{3}/2\,cm$. Poiché si ha $\sqrt{3}/2 < 0.95 < 1 < 2$, due dei vertici del triangolo dovranno essere sulle due basi del rettangolo, mentre il terzo vertice sarà su uno degli altri due lati. Pertanto abbiamo 2 configurazioni con il terzo vertice su BC e 2 con il terzo vertice su DA. In ciascuna delle due coppie, le due configurazioni sono l'una la simmetrica dell'altra rispetto all'asse del rettangolo parallelo alle basi. Naturalmente, se l'altezza del rettangolo fosse stata di $1\,cm$, avremmo avuto solo 2 configurazioni in tutto.

(2) La risposta è **E**. Dalla seconda delle tre uguaglianze, si ricava che $\triangle = 1$, dato che la somma di due numeri minori di 10 non può raggiungere 20. Perciò, in base alla prima uguagliuanza, si ha che o $\nabla = 2$ o $\nabla = 3$. Inoltre, guardando le cifre delle unità nelle prime due uguaglianze, si deduce anche che $\clubsuit + \spadesuit = 10$, dunque (dalla terza uguaglianza) $\circledast = 0$. Esaminando i vari casi e tenendo conto che due simboli diversi devono corrispondere a due cifre differenti, si trova che $\nabla = 2$, $\clubsuit = 4$, $\spadesuit = 6$, $\diamondsuit = 9$, $\bigstar = 3$ e $\heartsuit = 5$.

(3) La risposta è **C**. La scrittura del numero 2002 in forma binaria è 11111010010. Le ultime 6 cifre, cioè 010010, formano una sequenza palindroma. Anche l'ultima cifra e le ultime 3 cifre sono blocchi di cifre palindromi, ma 1 e 3 sono dispari.

(4) La risposta è **B**. Il numero 2 è un primo formidabile, dato che $2 - 1 = 1 = 1^3$. Non ce ne sono altri, perché, per k dispari, il numero $n^k + 1$ è divisibile per $n + 1$ (in conseguenza del teorema di Ruffini o anche per la formula di somma di una progressione geometrica). Se $k > 1$, ciò fornisce una fattorizzazione del numero $p = n^k + 1$, che non può dunque essere primo.

(5) La risposta è **A**: in tal caso, ci sono 3 coppie di palline nere e 3 coppie miste, per cui le due probabilità sono uguali. Una verifica diretta permette di escludere gli altri casi.

(6) La risposta è **B**. Se indichiamo con r l'asse del segmento AB, in ciascuno dei due semipiani rispetto a r, l'insieme $\mathcal{L}$ è formato da un arco di circonferenza, vale a dire è l'intersezione fra il semipiano e la circonferenza di raggio π centrata in A o B. Il fatto che la distanza fra A e B sia $\sqrt{2}\,\pi$ implica che, in ciascuno dei due semipiani rispetto a r, la curva $\mathcal{L}$ è data da 3 quarti di circonferenza. Pertanto la lunghezza di $\mathcal{L}$ è $2 \cdot (3/4) \cdot (2\pi)\,\pi = 3\pi^2$.

(7) La risposta è **C**. Qualunque siano i parametri h e k, il prodotto delle due radici è $3k$: dovendo esso essere il prodotto di due primi, una delle radici deve essere 3 (dal momento che k è intero) e l'altra deve essere k (che dovrà essere primo). Quindi la somma delle radici, ovvero $hk - 19$, deve valere $k + 3$, da cui $h = 1 + 22/k$, dove h è intero e k è primo (in alternativa, si può giungere a questa relazione fra h e k sostituendo il valore della

radice $x = 3$ nell'equazione). Perciò k è uno dei divisori primi di 22, ossia $k = 2$ (quindi $h = 12$, e le radici sono 3 e 2) oppure $k = 11$ (quindi $h = 3$, e le radici sono 3 e 11).

(8) La risposta è **C**. Ricordiamo che la media aritmetica fra due numeri positivi x e y, vale a dire $(x+y)/2$, è sempre maggiore o uguale alla loro media geometrica, vale a dire $\sqrt{xy}$. L'uguaglianza vale solo quando i numeri x e y sono uguali. Pertanto, abbiamo che $(x+y)^2 \geqslant (2\sqrt{xy})^2 = (2\sqrt{5})^2 = 20$. In effetti, prendendo $x = y = \sqrt{5}$, si ha $(x+y)^2 = (2\sqrt{5})^2 = 20$. Tra le varie maniere per verificare la disuguaglianza fra la media aritmetica e la media geometrica, suggeriamo questa interpretazione geometrica: sia P un punto che divide il segmento AB in due segmenti di lunghezze x e y. Tracciamo la circonferenza di diametro AB. La media geometrica di x e y è la lunghezza di un segmento PP' perpendicolare a AB, con P' sulla circonferenza (secondo teorema di Euclide). La media aritmetica è il raggio della circonferenza. E' chiaro che quest'ultimo supera l'altro segmento e che l'uguaglianza vale se e solo se P è il centro della circonferenza (ovvero il punto medio di AB), cioè quando $x = y$. Una risposta al quesito si può anche ottenere direttamente osservando che $(x+y)^2 = (x-y)^2 + 4xy \geqslant 4xy = 20$ (poiché $(x-y)^2 \geqslant 0$).

(9) La risposta è **D**. Indichiamo con R il terzo vertice del triangolo di base PQ, con r la parallela a BC passante per R, con X il punto d'intersezione fra r e BA, con Y il punto d'intersezione fra r e CA. Osserviamo che, siccome PQ rimane costante, sono costanti sia la distanza di R da BC, sia l'area del triangolo PQR, sia l'area del trapezio $BCYX$, sia (per differenza) la somma delle aree dei parallelogrammi $BPRX$ e $QCYR$. Infine, si tratta di notare che i due parallelogrammi considerati nel testo del problema hanno le stesse aree dei parallelogrammi $BPRX$ e $QCYR$. Le altre risposte si escludono: **B** perché quando P si avvicina a B l'area del parallelogramma con vertice in A tende a zero, **A** e **C** perché altrimenti **B** sarebbe vera.

(10) La risposta è **B**. Sviluppando la potenza $(m+1)^4$, si trova che la disuguaglianza richiesta equivale a $4m^3 + 6m^2 + 4m \geqslant 14$ il che è vero per ogni m intero positivo (infatti è vero per $m = 1$ e inoltre il valore di $4m^3 + 6m^2 + 4m$ aumenta all'aumentare di m). La disuguaglianza **C** è invece falsa per $m = 1$. Le disuguaglianze **A** e **D** corrispondono, nell'ordine, a: $m^4 + 6m^2 + 4m \leqslant 48$, e $4m^3 + 6m^2 + 4m \leqslant 999$. Esse valgono solo per alcuni m, ma, da un certo punto in poi (per m grande abbastanza), non valgono più.

(11) La risposta è **C**. Non possono essere, in generale, sufficienti 3 mosse, poiché 3 piani non racchiudono una regione limitata di spazio. Vediamo invece come 4 mosse sono sicuramente sufficienti. Alla prima mossa scegliamo il piano contenente una diagonale della base ed il vertice della piramide. A seconda del semispazio in cui si trova P rispetto a questo piano, con le 3 mosse successive sceglieremo i 3 piani in cui stanno le altre 3 facce della parte di piramide posta in quel semispazio. Le varie risposte che otterremo ci permetteranno di individuare la posizione di P rispetto alla piramide (ricordiamo che un poliedro convesso è sempre intersezione di semispazi limitati dai piani delle sue facce).

(12) La risposta è **C**. Supponiamo che la perpendicolare ad AB condotta da P tocchi il cerchio inscritto in F ed intersechi il lato AC in L, e che la perpendicolare ad AB condotta da Q tocchi il cerchio inscritto in H ed intersechi il lato BC in M. Inoltre, sia O l'incentro di ABC, sia D la proiezione di O sul lato AC, sia E la proiezione di O sul lato BC. Allora, i quadrilateri $OECD$, $OFPG$, $OGQH$ sono 3 quadrati con lo stesso lato (il raggio del cerchio inscritto). Quindi, i triangoli CLP e CMQ sono isosceli. Inoltre, il pentagono

$CLPQM$ ha 3 angoli retti, pertanto abbiamo che $C\widehat{L}P + C\widehat{M}Q = 270°$. Per differenza, si ottiene $L\widehat{C}P + M\widehat{C}Q = (360° - 270°)/2 = 45°$, quindi $P\widehat{C}Q = 45°$.

(13) La risposta è **A**. Troviamo il raggio di $\mathcal{C}_3$ (e $\mathcal{C}_4$), che indichiamo con x. Per la simmetria della costruzione, il centro D di $\mathcal{C}_3$ appartiene alla tangente comune di $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ passante per O. Inoltre, se chiamiamo E il centro di $\mathcal{C}_1$, il triangolo EOD è rettangolo in O. Si ha: $\overline{EO} = r/2$, $\overline{OD} = r - x$, $\overline{DE} = r/2 + x$. Con il teorema di Pitagora, si ottiene $(r/2)^2 + (r-x)^2 = (r/2+x)^2$, da cui si trova $x = r/3$. Perciò l'unione dei 4 cerchi interni a $\mathcal{C}$ ha area: $2 \cdot \pi\,(r/2)^2 + 2 \cdot \pi\,(r/3)^2 = (13/18)\,\pi\,r^2$, dunque la parte rimanente ha area $(5/18)\,\pi\,r^2$.

(14) La risposta è **A**. Infatti, dai dati sappiamo che 1 rubino vale meno di 2 turchesi: il gruppo **B** sono 8 turchesi, il gruppo **C** sono 3 turchesi + 3 rubini (che è meno di 9 turchesi), il gruppo **D** sono 4 turchesi + 1 rubino (ovvero meno di 6 turchesi), infine il gruppo **E** equivale a 4 rubini + 1 turchese (cioè meno di 9 turchesi).

(15) La risposta è **D**. L'idea è di eseguire il prodotto di tutti quei divisori accoppiandoli: per ogni divisore k, c'è anche il divisore $400/k$, ed il loro prodotto fa 400. L'unico caso eccezionale (visto che 400 è un quadrato) è il 20, che invece non può essere abbinato allo stesso modo con un altro divisore. Poiché $400 = 2^4 \cdot 5^2$, ci sono 15 divisori (essi si ottengono eseguendo i possibili prodotti di uno dei 5 divisori di 2^4 (cioè 1, 2, 2^2, 2^3, 2^4) con uno dei 3 divisori di 5^2 (cioè 1, 5, 5^2)). Quindi, dei 15 divisori del numero 400, 14 si associano in 7 coppie, ognuna con prodotto 400, e poi c'è il 20. In tutto, il prodotto richiesto è dunque: $20 \cdot (400)^7 = 20 \cdot 20^{14} = 20^{15}$.