PROGETTO OLIMPIADI - sezione di Roma 26 marzo 2003

GARA DI MATEMATICA A SQUADRE

dipartimenti di Matematica delle Università

“La Sapienza” e “Roma Tre”

con il contributo dell’Unione Matematica Italiana e del CARFID

(1) A un torneo di calcio sono iscritte 5 squadre: Aquile, Bradipi, Coccodrilli, Dinosauri, Elefanti. Durante il torneo, ogni squadra incontra ogni altra squadra per 2 volte. Ciascuna squadra riceve 3 punti per ogni vittoria, 1 punto per ogni pareggio, 0 punti per ogni sconfitta. Alla fine, la classifica è questa:

Bradipi	16	punti
Elefanti	12	punti
Aquile	10	punti
Dinosauri	8	punti
Coccodrilli	6	punti.

Quante partite sono finite in parità?

A. 5

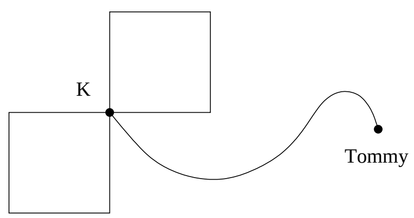
B. 8

C. 10

D. 14

E. 16

(2) Il cane Tommy fa la guardia a due edifici di pianta quadrata, ed è legato a una catena lunga 16 metri. Gli edifici hanno lati di 4 metri e sono disposti come nella figura. La catena è fissata al suolo nel punto K dove si incontrano i due edifici.



Il cane non può entrare in nessun edificio, né può passare attraverso il punto K. Qual é l’area della zona che Tommy può calpestare (espressa in metri quadri)?

A. $256\,\pi$

B. $192\,\pi$

C. $184\,\pi$

D. $16 + 168\,\pi$

E. nessuna delle risposte precedenti

(3) Dobbiamo riempire le 9 caselle della tabella raffigurata con numeri interi non negativi, in maniera da rispettare tutte queste condizioni:

- in almeno una delle caselle viene inserito il numero 3;
- la somma dei numeri in ciascuna riga è 3;
- la somma dei numeri in ciascuna colonna è 3.

In quanti modi differenti possiamo riempire la tabella?

A. 18

B. 24

C. 27

D. 30

E. 36

(4) Il matematico Xyz ha introdotto e studiato i numeri bizzarri. Si tratta di particolari numeri naturali, di cui ignoriamo la definizione. Sappiamo soltanto che il matematico Xyz ha dimostrato questo teorema:

"se un numero è bizzarro, allora è dispari o multiplo di 3"

(dove la "o" significa che il numero può essere dispari oppure multiplo di 3 o anche entrambe le cose). Possiamo dedurre che:

A. se un numero non è bizzarro, allora è pari

B. se un numero bizzarro è pari, allora è multiplo di 6

C. se un numero bizzarro è dispari, allora è multiplo di 3

D. esistono infiniti numeri bizzarri

E. non esistono numeri bizzarri multipli di 10

(5) Qual è la probabilità che, lanciando 2003 dadi, la somma dei numeri ottenuti sia pari?

A. 1000/2003

B. 1001/2003

C. 1002/2003

D. 1003/2003

E. nessuna delle risposte precedenti

(6) Stabilire quante sono le soluzioni intere dell'equazione $2^x + 2^y = 2^z$ (per soluzione intera intendiamo una terna ordinata (x, y, z) di numeri interi che soddisfano l'equazione).

A. nessuna

B. 1

C. 2

D. infinite

E. nessuna delle risposte precedenti

(7) Trovare l'area di un pentagono equilatero con lato di lunghezza 1, avente 2 angoli retti e 3 angoli ottusi.

A. $1+\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

B. $3/2$

C. $1+\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

D. $1+\dfrac{\sqrt{5}}{4}$

E. $1-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

(8) Indiana Jones è stato morso da un terribile scorpione velenoso. L'unico antidoto è in una fiala che si trova in mezzo ad altre 3, di cui 2 contenenti acqua distillata e 1 contenente un liquido capace di annullare l'effetto benefico dell'antidoto. Le 4 fiale ed il loro contenuto sono del tutto indistinguibili ai sensi. Il nostro eroe, con i minuti contati, ha solo la possibilità di prendere un numero di fiale a suo piacimento, versarle in un recipiente, e bere la sostanza cosí ricavata. Data la sua scaltrezza, Indiana Jones adotterà la strategia migliore. Se indichiamo con p la sua probabilità di salvarsi, abbiamo che:

A. $p < \frac{1}{4}$

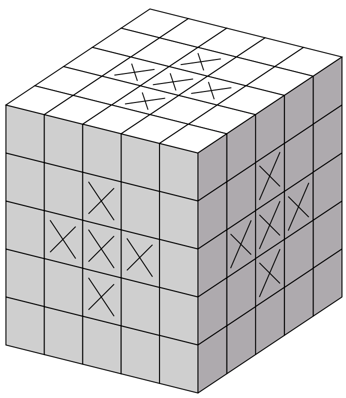
B. $p = \frac{1}{4}$

C. $\frac{1}{4} < p < \frac{1}{2}$

D. $p = \frac{1}{2}$

E. $p > \frac{1}{2}$

(9) Da un cubo di spigolo 5, formato da cubetti di spigolo 1 (come in figura), si tolgono tutte le file di cubetti (tra ogni faccia e la sua opposta) in corrispondenza dei 5 contrassegnati, per ciascuna delle coppie di facce opposte.



Quanti cubetti rimangono?

A. 50

B. 56

C. 65

D. 76

E. 100

(10) Se scegliamo 5 punti -non necessariamente distinti- in un segmento di lunghezza 3, quanto può valere, al massimo, la somma delle distanze fra tutte le possibili coppie di punti presi fra questi 5?

A. 6

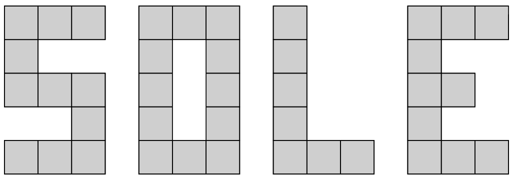
B. 15

C. 18

D. 24

E. 30

(11) Osvaldo e Filiberto sono due piastrellisti. Dotati di moltissima buona volontà, decidono di pavimentare l'intero piano. Hanno a disposizione soltanto mattonelle di 4 forme particolari (naturalmente in quantità infinita) come nel seguente disegno, e devono utilizzarne 2 tipi differenti.



Quali, tra le seguenti scelte di mattonelle, permettono ai due di portare a compimento il loro proposito? Precisiamo che, per contratto, i nostri infaticabili lavoratori sono obbligati ad usare entrambi i tipi di mattonelle scelte, senza spezzarle, senza rovesciarle, senza sovrapporle e senza lasciare spazi vuoti.

A. la "L e la "S"

B. la "O e la "E"

C. la "E e la "S"

D. la "L e la "O"

E. nessuna delle risposte precedenti

(12) Lo Stato di Matematika è diviso in N regioni. Non abbiamo alcuna idea di come sia la mappa dello Stato e delle sue regioni. Tuttavia, è possibile affermare che:

A. se ogni regione confina con un numero dispari di altre regioni, allora N è pari

B. se ogni regione confina con un numero pari di altre regioni, allora N è dispari

C. se ogni regione confina con un numero pari di altre regioni, allora N è pari

D. se ogni regione confina con un numero dispari di altre regioni, allora N è dispari

E. nessuna delle affermazioni precedenti è corretta

(13) Dati i numeri naturali a e b, in quali casi il numero $a^3b - ab^3$ è divisibile per 3?

A. se e solo se entrambi i numeri a e b sono diversi da 0

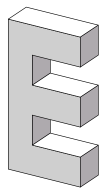
B. se e solo se $a = b$

C. se e solo se almeno uno dei numeri a, b è divisibile per 3

D. sempre

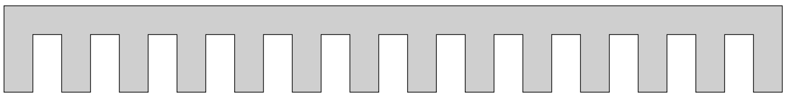
E. mai

(14) Questo solido rotola sulla sabbia senza strisciare.

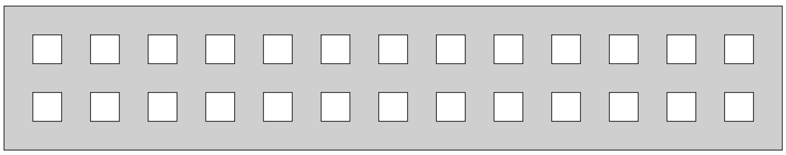


Quale delle seguenti tracce può lasciare?

A. 

B. 

C. 

D. 

E. 

(15) Siano dati nel piano un punto P e due rette r, s e sia n il numero dei triangoli equilateri non degeneri con un vertice in P e gli altri due appartenenti uno alla retta r ed uno alla retta s. I tre oggetti possono anche coincidere o sovrapporsi.

NON è possibile scegliere P, r, s in modo che...

A. $n = 0$

B. $n = 1$

C. $n = 2$

D. $n = 3$

E. n sia infinito