PROGETTO OLIMPIADI - sezione di Roma 26 marzo 2003

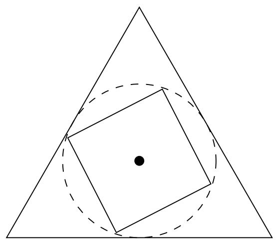
SOLUZIONI DEI QUESITI DELLA GARA INDIVIDUALE DI MATEMATICA

dipartimenti di Matematica delle Università

"La Sapienza" e "Roma Tre"

con il contributo dell'Unione Matematica Italiana e del CARFID

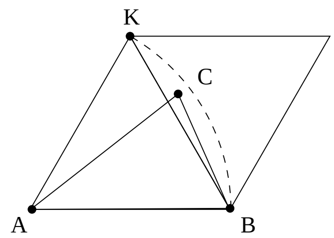
(1) Affinché il quadrato rimanga sempre nel triangolo, è necessario e sufficiente che il triangolo contenga il cerchio circoscritto al quadrato. Il triangolo equilatero cercato deve essere dunque circoscritto al cerchio circoscritto al quadrato. La diagonale di tale quadrato, lunga $\sqrt{2}$, è uguale al diametro del cerchio inscritto nel triangolo. Il raggio di tale cerchio è allora $\sqrt{2}/2$, e l'altezza del triangolo è $h = 3\sqrt{2}/2$ (l'ortocentro coincide con il baricentro e si trova ad un terzo dell'altezza). D'altra parte, abbiamo $h^2 = x^2 - (x/2)^2$, da cui $x = \sqrt{6}$.



(2) Il numero cercato -chiamiamolo N- non può superare 11111, altrimenti $9N$ avrebbe 6 cifre. Dunque la prima cifra (da sinistra) deve essere 1, che dovrà essere la cifra delle unità di $9N$. Perciò la cifra delle unità di N è 9. Quindi N ha un aspetto del tipo $1xyz9$, dove x, y e z sono 3 cifre decimali ancora da determinare. La cifra x è 0 oppure 1 (altrimenti N supererebbe 11111). Se fosse $x = 1$, dovremmo avere $z = 7$, ma a questo punto non si può sistemare la terza cifra y (essa dovrebbe essere 0, ma $11079 \cdot 9 = 99711$). Concludiamo che $x = 0$. Dunque il numero N è del tipo $10yz9$. Per trovare z, notiamo che la cifra delle unità di $9z + 8$ deve essere 0, per cui $z = 8$. Il numero N ha adesso la forma $10y89$. Per determinare y, notiamo che y deve essere la cifra delle unità di $9y + 8$, da cui segue che o $y = 4$ oppure $y = 9$. La prima possibilità va esclusa, in quanto $10489 \cdot 9 = 94401$. Invece, $y = 9$ porta a una soluzione (l'unica), visto che $10989 \cdot 9 = 98901$.

(3) Notiamo intanto che $m^2 - 4n^2 = (m - 2n)(m + 2n)$. Nel problema (a), questo prodotto di interi deve dare il numero primo 13, quindi (tenendo presente che m e n devono essere positivi) si avrà $m + 2n = 13$ e $m - 2n = 1$, da cui $m = 7$ e $n = 3$. Il problema (b) non ha soluzioni, poiché $m + 2n$ e $m - 2n$ o sono entrambi pari o entrambi dispari: in questo caso dovrebbero essere pari, ma allora il loro prodotto sarebbe multiplo di 4, mentre $222222 = 2 \cdot 111111$ non lo è.

(4) Possiamo supporre che il lato maggiore del triangolo considerato abbia lunghezza l [infatti, se il lato maggiore ha lunghezza più piccola di l, esso è sempre contenuto in un triangolo il cui lato maggiore è l, ottenuto per similitudine moltiplicando le lunghezze dei lati per un'opportuna costante]. Sia dunque ABC il triangolo e sia AB il suo lato maggiore, avente lunghezza l. Disponiamo un triangolo equilatero ABK in modo che K giaccia, rispetto ad AB, nello stesso semipiano in cui si trova anche il vertice C. Se il triangolo ABK contiene il punto C, allora già il triangolo ABK ricopre l'intero triangolo ABC. Altrimenti, o AC incontra BK o BC incontra AK: supponiamo di essere nel primo caso, ovvero C è dalla parte opposta di A rispetto a BK. Il punto C non può essere esterno alla circonferenza di raggio l e centro A, la quale passa per B e K, pertanto C giace nel segmento circolare di corda BK, che è contenuto nel triangolo equilatero di lato BK non coincidente con ABK. L'unione di questi due triangoli equilateri di lato l è quindi sufficiente a ricoprire ABC (vedere la figura).



Per fornire la costruzione richiesta nella seconda parte, basta prendere un triangolo isoscele di lato obliquo $\overline{AB} = \overline{AC} = l$ e angolo in A minore di $60°$. Dato che AB ha la lunghezza massima l, se volessimo ricoprire il triangolo con un solo triangolo equilatero, saremmo costretti a scegliere AB come lato di tale triangolo, ma, a quel punto, il vertice C ne rimarrebbe fuori.