PROGETTO OLIMPIADI - sezione di Roma 26 marzo 2003

SOLUZIONI DEI QUESITI DELLA GARA DI MATEMATICA A SQUADRE

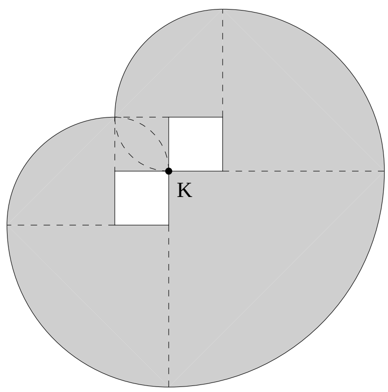
dipartimenti di Matematica delle Università

“La Sapienza” e “Roma Tre”

con il contributo dell’Unione Matematica Italiana e del CARFID

(1) La risposta giusta è **B**. Nell’intero torneo, si giocano complessivamente 20 partite: infatti ciascuna delle 5 squadre deve giocare 4 volte in casa. I punti assegnati in tali 20 partite sono stati $16+12+10+8+6 = 52$. Se non vi fosse stato alcun pareggio, i punti complessivi sarebbero stati $20 \times 3 = 60$. Gli 8 punti in meno realizzati corrispondono ad altrettanti pareggi (in caso di pareggio si assegnano in tutto 2 punti invece di 3, dunque 1 punto in meno).

(2) La risposta giusta è **D**. La superficie raggiungibile da Tommy è quella illustrata in figura, formata da cinque settori circolari (quarti di cerchio) e un quadrato. I quarti di cerchio hanno questi raggi: uno di 16 metri, due di 12 metri, due di 8 metri. Il quadrato ha lato di 4 metri.



In tutto, l’area è (in metri quadri):

$$\frac{16^2\pi}{4} + 2 \cdot \frac{12^2\pi}{4} + 2 \cdot \frac{8^2\pi}{4} + 4^2 = 168\,\pi\, +\, 16.$$

(3) La risposta giusta è **B**. Intanto vediamo quanti “3” possono essere presenti. Nel testo si richiede che ve ne sia almeno uno. Supponiamo che ce ne sia anche un altro (collocato in una riga e una colonna differenti). Osserviamo che in tutte le altre caselle che si trovano nelle righe e nelle colonne di questi “3” devono essere collocati degli “0”, per avere 3 come somma. Rimane una sola casella alla quale si dovrà pertanto assegnare il valore “3” poiché nelle caselle allineate è stato collocato il valore “0”. Perciò o vi è un solo “3” nella tabella oppure ve ne sono tre, posti in righe e colonne differenti (e tutte le altre caselle sono “0”). Ci sono 6 modi di scegliere la disposizione di una simile terna di “3” collocati in righe e colonne differenti (infatti possiamo scegliere fra 3 differenti righe dove collocare il “3” della prima colonna e, una volta deciso questo, ci sono 2 differenti righe dove collocare il “3” della seconda colonna, dopo di che, per il “3” della terza colonna, c’è una sola possibilità). Consideriamo il caso che ci sia invece un solo “3” nella tabella. Ciò significa che viene inserito “0” nelle 4 caselle allineate con quella in cui compare il “3”. Rimangono da assegnare i valori in 4 caselle poste su 2 righe e 2 colonne, in modo da avere la somma 3 su ciascuna riga e su ciascuna colonna. Fissiamo una di queste 4 caselle libere, ad esempio quella più in alto a sinistra. Non possiamo collocarvi il “3” (adesso stiamo contando i casi

in cui compare un solo “3”), e neppure “0” (altrimenti dovremmo assegnare “3” alla terza casella della riga). Dunque, potremo scegliere se collocarvi il valore “1” oppure “2”. Una volta assegnato questo numero, tutti gli altri elementi della tabella sono determinati dalle condizioni date. Pertanto, dopo aver scelto l’unica casella in cui va il “3” rimangono 2 modi per completare la tabella senza utilizzare altri “3”. Visto che tale casella in cui collocare il “3” può esser scelta in 9 modi, otteniamo altre 18 differenti possibilità. In tutto, ci sono quindi $6 + 18 = 24$ modi diversi di riempire la tabella rispettando le richieste. In figura sono riportati due esempi dei casi possibili.

0	3	0
0	0	3
3	0	0

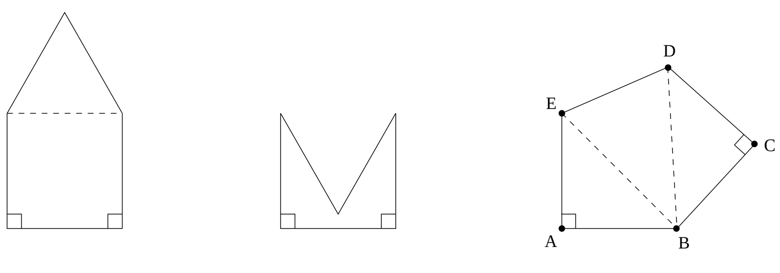
0	1	2
3	0	0
0	2	1

(4) La risposta giusta è **B**. Infatti, sappiamo che un numero bizzarro è dispari o multiplo di 3. Se un certo numero bizzarro n è pari, allora non si presenta la prima eventualità (essere dispari), per cui devi presentarsi la seconda: n è perciò multiplo di 3 ed, essendo pari, anche di 6. Quanto alle altre risposte, la **A** equivale a dire che ogni numero dispari è bizzarro (e non ci è noto che questo sia vero); la **C** va scartata perché, se un numero bizzarro è dispari, allora, in base all’enunciato dimostrato da Xyz, non possiamo dire nient’altro; quanto alla **D**, osserviamo che non sappiamo nulla su quanti siano i numeri bizzarri (a rigore, potrebbe perfino non esisterne nessuno: sappiamo solo che “se un numero è bizzarro ...”); riguardo la **E**, si noti che i multipli di 30 sono anche multipli di 10 e potrebbero essere bizzarri (non disponiamo di alcuna informazione che escluda questa possibilità).

(5) La risposta giusta è **E**. Infatti, c’è una corrispondenza biunivoca fra gli esiti che danno luogo a una somma pari e quelli che forniscono una somma dispari. Per rendercene conto, fissiamo uno dei dadi. Scambiando il numero uscito in quel dado in questa maniera ($1 \leftrightarrow 2$, $3 \leftrightarrow 4$, $5 \leftrightarrow 6$), otteniamo, a partire da tutti i possibili esiti con somma pari, tutti quanti gli esiti con somma dispari, e viceversa. Ciò prova che vi è lo stesso numero di esiti che danno luogo all’uno o all’altro evento, dunque le probabilità di avere somma pari o dispari sono uguali, vale a dire $1/2$.

(6) La risposta giusta è **D**. Basta osservare che ogni terna del tipo $(x, y, z) = (k, k, k + 1)$, con k intero qualunque, è una soluzione. Infatti, si ha $2^k + 2^k = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$. Si può anche osservare che queste sono le uniche soluzioni: infatti, se fosse $x < y$, avremmo $2^x + 2^y = 2^x\,(1 + 2^{y-x})$. Ma una potenza di 2 moltiplicata per un numero dispari maggiore di 1 non può dare una potenza di 2.

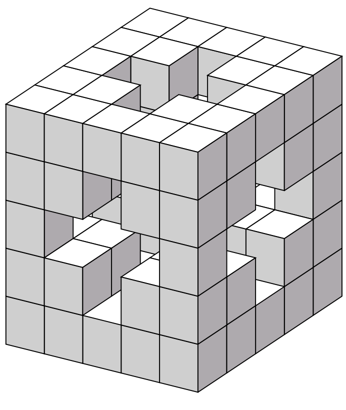
(7) La risposta giusta è **A**. Osserviamo intanto che i due angoli retti non possono essere adiacenti al medesimo lato: se cosí fosse, l’angolo opposto a tale lato sarebbe o di 60°, oppure di 300° con gli altri due di 30° (prime due figure): in tutti e due i casi vi sarebbero angoli non ottusi.



Dunque, i vertici dei due angoli retti non sono consecutivi (terza figura); indicata con A, B, C, D, E la sequenza dei vertici, supponiamo, ad esempio, che gli angoli retti abbiano per vertici A e C. Tracciando le diagonali da B -il vertice intermedio fra i due angoli retti- il pentagono viene suddiviso nei triangoli ABE, BDE e BCD. I due triangoli ABE e BCD sono ciascuno la metà di un quadrato di lato 1, mentre BDE è isoscele con base 1 e lati obliqui $\sqrt{2}$. Con il teorema di Pitagora troviamo la misura h dell'altezza di BDE sul lato DE: si ha $h^2 = (\sqrt{2})^2 - (1/2)^2 = 7/4$, da cui l'area di BDE risulta $\frac{1}{2} \cdot h \cdot 1 = \frac{\sqrt{7}}{4}$. Pertanto l'area di $ABCDE$, sommando le aree dei triangoli, è $1 + \frac{\sqrt{7}}{4}$. Infine, verifichiamo che gli angoli $\widehat{B}$, $\widehat{D}$ ed $\widehat{E}$ sono in effetti ottusi. Per $\widehat{B}$, il fatto è chiaro, dato che contiene 2 angoli di 45°. Gli angoli $\widehat{D}$ ed $\widehat{E}$ sono uguali. Affinché siano ottusi è necessario e sufficiente che sia $B\widehat{E}D > 45°$, il che equivale ad avere $E\widehat{B}D < 90°$. Quest'ultimo fatto è vero in quanto $\overline{BE}^2 + \overline{BD}^2 = 4 > \overline{DE}^2 = 1$.

(8) La risposta giusta è **C**. Se decidesse di prendere 0 o 4 fiale, Indiana Jones non avrebbe modo di salvarsi. Se ne scegliesse 1, la probabilità sarebbe $1/4$, cosí come se ne prendesse 3 [in questo caso l'unica fiala rimanente dovrebbe contenere l'anti-antidoto]. Vediamo cosa succede prendendone 2: in tal caso, egli si salva se e solo se una delle 2 fiale scelte è l'antidoto e l'altra non è l'anti-antidoto. La probabilità che una delle 2 sia l'antidoto è $1/2$, mentre, una volta presa la fiala buona, c'è probabilità $2/3$ che l'altra non contenga l'anti-antidoto. La probabilità di salvarsi sarebbe allora $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$. Fra le varie scelte, quella di prendere 2 fiale è dunque la più vantaggiosa: Indiana Jones farà questo e si salverà con probabilità $1/3$. [Tuttavia, vista la buona sorte che protegge gli eroi, possiamo prevedere che finirà sicuramente per salvarsi.]

(9) La risposta giusta è **D**. Infatti, rimangono un cubo formato da 8 cubetti per ciascuno degli 8 vertici, ed il singolo cubetto centrale di ognuno dei 12 spigoli (vedere la figura). In tutto i cubetti sono $8 \cdot 8 + 12 = 76$.

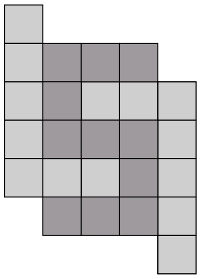


(10) La risposta giusta è **C**. Identifichiamo il segmento con l'intervallo numerico $[0, 3]$, in modo che i 5 punti corrispondono a 5 numeri x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 e la distanza tra due punti corrisponde alla differenza tra i due numeri. Assumiamo di avere $x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant x_4 \leqslant x_5$. Allora la somma tra tutte le distanze è data dall'espressione

$$4x_5 + 2x_4 - 2x_2 - 4x_1.$$

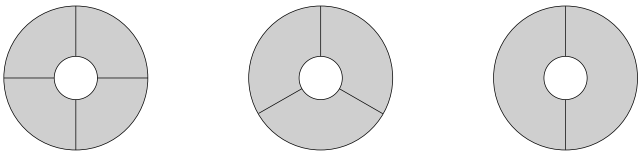
In questa formula il coefficiente di ciascun x_j è la differenza fra quanti dei 5 numeri sono minori o uguali a x_j e quanti sono maggiori o uguali. Questa somma è massima quando $x_5 = x_4 = 3$ e $x_2 = x_1 = 0$ [il valore di x_3 è indifferente]: in tal caso essa vale 18.

(11) La risposta giusta è **A**. Seguendo, per esempio, lo schema indicato in figura, si può ricoprire una striscia di piano "in verticale" e quindi, ripetendolo, l'intero piano.



Con le altre combinazioni non è possibile: nella **B** e nella **D** vi è l'ostacolo insormontabile di non poter ricoprire lo spazio al centro della "O" (che dovrebbe essere utilizzata per contratto). Infine, per quanto riguarda l'alternativa **C**, notiamo che si potrebbe piastrellare il piano usando la sola "S", ma la presenza della "E" rende impossibile il compito (come, del resto, non vi sono problemi a piastrellare usando la sola "L").

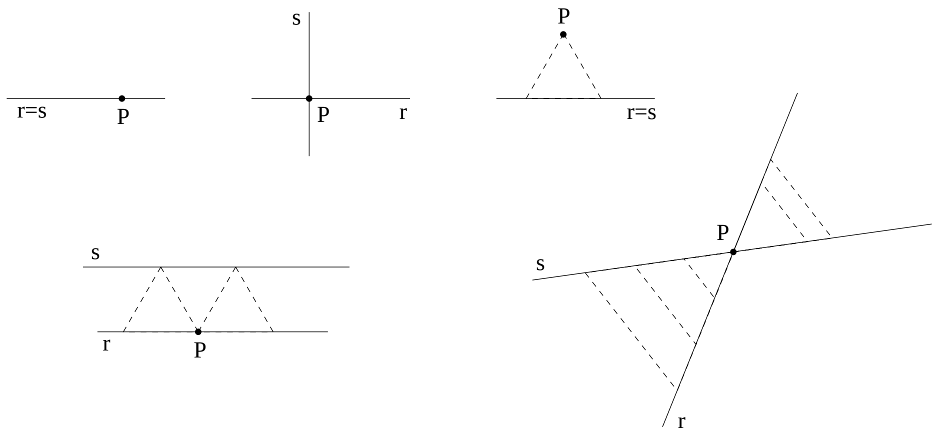
(12) La risposta giusta è **A**. Per vedere che l'affermazione contenuta in **A** è giusta, assumiamo l'ipotesi che ciascuna regione abbia un numero dispari di confinanti. Per visualizzare meglio la situazione, sostituiamo ciascuna regione con un puntino, e uniamo con una linea tutte le coppie di puntini che corrispondono a regioni confinanti. Ora associamo a ciascun puntino il numero di puntini ad esso collegati con una singola linea (ossia il numero delle regioni confinanti): per l'ipotesi fatta, ognuno di questi numeri è dispari. Tuttavia, la somma di tutti questi numeri deve essere pari: infatti, sommare questi numeri è come contare 2 volte tutte le linee che abbiamo tracciato fra i puntini (una volta per ciascuno dei 2 estremi della linea). Affinché la somma di numeri tutti quanti dispari sia un numero pari, bisogna che il numero di addendi sia pari, cioè deve essere pari il numero di puntini (le regioni di Matematika). Questo prova l'affermazione **A**. Per vedere che le altre implicazioni non sono valide, basta considerare delle configurazioni come quelle rappresentate in figura.



(13) La risposta giusta è **D**. Abbiamo: $a^3b - ab^3 = ab(a-b)(a+b)$. Se né a né b sono divisibili per 3, allora o lo è $a-b$ o lo è $a+b$. In ogni caso, il prodotto dei 4 fattori è senz'altro divisibile per 3.

(14) La risposta giusta è **E**. Otteniamo la traccia indicata facendo rotolare il solido in modo che appoggi al suolo sempre il suo spessore.

(15) La risposta giusta è **D**. Intanto facciamo vedere che, per determinate configurazioni di P, r, s, effettivamente vi sono proprio 0, 1, 2 e infiniti triangoli equilateri (vedere le figure nella pagina seguente). Ad esempio, se le rette r e s coincidono e P è un loro punto, non vi è alcun triangolo equilatero che soddisfa le condizioni. Stessa cosa accade se r e s sono rette incidenti che non formano angoli di 60° e P è il loro punto comune. Se, invece, r e s coincidono e P è un punto esterno, allora esiste esattamente 1 triangolo equilatero come richiesto. Se r e s sono parallele e P è un punto di r, allora si vede subito che ci sono 2 triangoli equilateri del tipo indicato nel testo. Se le rette r e s sono incidenti a 60° e P è il loro punto comune, ci sono infiniti triangoli del tipo descritto. Queste considerazioni permettono di escludere le risposte **A**, **B**, **C**, **E**.



Ora vediamo che, in effetti, non possono esserci esattamente 3 triangoli equilateri del tipo richiesto. Se le due rette r e s coincidono già abbiamo visto che o non ci sono triangoli o ce n'è uno soltanto. Supponendo, quindi, che r e s non coincidono, ad ogni triangolo equilatero del tipo richiesto, possiamo associare la terna ordinata dei suoi vertici formata da (P, vertice su r, vertice su s). Se di triangoli ve ne fossero 3, avremmo che almeno 2 di essi sarebbero orientati nello stesso modo, ad esempio in senso orario. Ciò significa che avremmo 2 terne distinte del tipo (P, R', S') e (P, R'', S''), dove S' (che è su s per definizione) si ottiene ruotando di 60° (in senso orario, con centro di rotazione P) il punto R' su r, e cosí S'' (che è su s) si ottiene ruotando di 60° (in senso orario, con centro di rotazione P) il punto R'' su r. Ma ciò significa che, ruotando ogni punto di r di 60° (in senso orario, con centro di rotazione P), si trova sempre un punto di s, in quanto le rotazioni conservano l'allineamento. Pertanto, esisterebbero infiniti triangoli equilateri con vertici in P, r, s: non possono essercene esattamente 3.