Roma, 19/3/2004 **PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA**

GARA A SQUADRE

dipartimenti di Matematica delle Università "La Sapienza" e "Roma Tre"

con il contributo dell'Unione Matematica Italiana e del CARFID

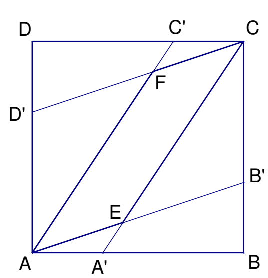
(1) Con dei tasselli rettangolari di dimensioni 5×1, Giulia vorrebbe ricoprire una scacchiera 8×9, senza sovrapporli e collocandoli interamente sulla scacchiera. Quante sono, come minimo, le caselle che rimarranno scoperte?

A. nessuna
B. 2
C. 5
D. 12
E. 17

(2) Pierino distribuisce a scuola il seguente questionario:
I. Qual è la materia che ti piace di più tra: Matematica, Fisica, Italiano, Storia?
II. Dove vai di solito in vacanza fra: mare, montagna, lago?
III. Qual è il tuo personaggio preferito tra: Einstein, Gandhi, Marylin Monroe, Totti?
Il compito di Pierino terminerà appena avrà ricevuto 10 questionari compilati in modo identico. Quanti questionari dovrà controllare, nel peggiore dei casi, per concludere il suo lavoro? [naturalmente supponiamo di non essere in una scuola di Roma...]

A. 49
B. 82
C. 433
D. 481
E. 730

(3) Nel quadrato $ABCD$ di lato unitario, indichiamo, nell'ordine, con A', B', C', D' i punti dei segmenti AB, BC, CD, DA tali che $\overline{AA'} = \overline{BB'} = \overline{CC'} = \overline{DD'} = 1/3$. Inoltre, sia E il punto d'intersezione fra AB' e $A'C$ e sia F il punto d'intersezione fra CD' e $C'A$. Qual è l'area del parallelogramma $AECF$?



A. 2/7
B. 1/3
C. 4/15
D. 1/4
E. 7/25

(4) Dato un numero reale x, indichiamo con $[x]$ l'intero più grande tra quelli non maggiori di x. Per esempio $[\frac{7}{3}] = 2$ e $[6] = 6$. Quanti sono gli interi positivi n, minori o uguali a 2004, che soddisfano l'equazione

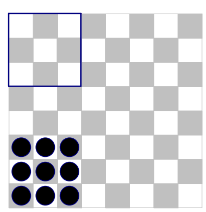
$$[n/2] + [n/3] + [n/4] = n/2 + n/3 + n/4 \ ?$$

A. nessuno
B. 83
C. 84
D. 166
E. 167

(5) In un trapezio $ABCD$, le basi AB e CD misurano, rispettivamente, 39 cm e 15 cm. Un segmento EF, con gli estremi sui lati obliqui, è parallelo alle basi e taglia la figura in modo che l'area del trapezio di basi EF e CD sia 1/6 dell'intero $ABCD$. Quanto è lungo il segmento EF?

A. 19 cm
B. 21 cm
C. 22 cm
D. 23 cm
E. 24 cm

(6) Nelle 9 caselle in basso a sinistra di una scacchiera 8×8, sono collocate 9 pedine che formano un quadrato 3×3. Possiamo muoverle cosí: ogni pedina può essere spostata di 2 caselle (in orizzontale, in verticale, o in diagonale), purché la casella che viene saltata sia occupata e la casella di arrivo sia libera. Con mosse di questo tipo, vogliamo sistemare le 9 pedine sul quadrato 3×3 contenente l'estremo in alto a sinistra della scacchiera. Quale delle seguenti affermazioni è vera?



A. termineremo il compito in un numero pari di mosse
B. termineremo il compito in un numero dispari di mosse
C. termineremo il compito in un numero di mosse multiplo di 9
D. non c'è modo di spostare la pedina inizialmente posta sulla casella d'angolo
E. le affermazioni precedenti sono tutte false

(7) Se n è un intero positivo, definiamo $n!$ come il prodotto di tutti gli interi da 1 a n (compresi). Ad esempio: $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

A. 126! è divisibile per 127
B. 130! è divisibile per 131
C. 132! è divisibile per 133
D. 136! è divisibile per 137
E. 138! è divisibile per 139

(8) Dopo il girone di andata di un torneo di calcio, al quale partecipano m squadre, la squadra dei Guelfi ha più punti in classifica rispetto ai Ghibellini. I tifosi di questi ultimi, tuttavia, si rammaricano del "nuovo" modo di assegnare i punti (3 per la vittoria, 1 per il pareggio, 0 per la sconfitta). Infatti, se si adottasse ancora il "vecchio" sistema (2 per la vittoria, 1 per il pareggio, 0 per la sconfitta), i Ghibellini avrebbero più punti dei Guelfi. Qual è il minimo valore di m per cui può verificarsi la circostanza descritta?

A. 4
B. 5
C. 6
D. 7
E. 9

(9) Tre scatole contengono, rispettivamente, 2 palline bianche, 1 pallina bianca e 1 nera, 2 palline nere. Mario, che è bendato, sceglie a caso una delle scatole e da lí estrae una pallina. A questo punto, si toglie la benda, scopre che la pallina è bianca, e la rimette dentro. Qual è a questo punto la probabilità che, con un nuovo sorteggio dalla stessa scatola, Mario estragga ancora una pallina bianca?

A. 5/6
B. 3/4
C. 2/3
D. 1/2
E. 1/3

(10) In un lontano paese, ogni abitante ha i capelli biondi oppure mori e può iscriversi all'Università soltanto chi ha o il medesimo sesso o il medesimo colore di capelli del sovrano, ma non entrambe le qualità. Non è noto se il sovrano sia maschio o femmina. Sapendo che un maschio biondo si può iscrivere, quale delle seguenti affermazioni è vera?

A. i maschi mori possono iscriversi
B. le femmine bionde possono iscriversi
C. i maschi mori o le femmine bionde possono iscriversi, ma non entrambi
D. le femmine more possono iscriversi
E. le affermazioni precedenti sono tutte false

(11) Un trapezio rettangolo è circoscritto a una circonferenza. Sia $ABCD$ il quadrilatero che ha per vertici i punti di tangenza, con A sul lato del trapezio perpendicolare alle basi. L'angolo $A\widehat{B}C$ è di $70°$. Le rette AC e BD formano angoli di...

A. $55°$
B. $60°$
C. $70°$
D. $75°$
E. $90°$

(12) Quali sono le 4 cifre finali di 11^{100} (nell'abituale scrittura decimale)?

A. 6001
B. 1011
C. 1331
D. 0121
E. 0101

(13) Siano P e Q due vertici opposti di un cubo (ossia due vertici che non appartengono ad una stessa faccia). Intersechiamo il cubo con il piano passante per P e per i punti medi di due degli spigoli uscenti da Q. Che poligono si ottiene?

A. un triangolo
B. un parallelogramma
C. un quadrilatero che non è un parallelogramma
D. un pentagono
E. un esagono

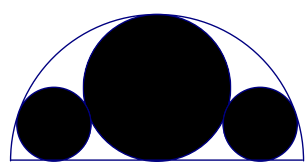
(14) Robin Hood e Mr. Bean si sfidano in una gara di tiro con l'arco. Il bersaglio è un cerchio di raggio 1 e vince chi lo colpisce più vicino al centro. Ciascuno effettua un solo tiro, ed entrambi sono abbastanza abili da colpire con certezza il bersaglio, ma:

- Mr. Bean colpisce "alla cieca", ossia con probabilità uniforme in qualsiasi parte del bersaglio;
- Robin Hood ha probabilità r di colpire il bersaglio ad una distanza dal centro non maggiore di r (per ogni $0 \leqslant r \leqslant 1$).

Con che probabilità sarà Mr. Bean a vincere la gara?

A. $1/4$
B. $1/\pi$
C. $1/3$
D. $1/2$
E. $2/3$

(15) Da un semicerchio, il cui diametro ha misura 2, rimuoviamo dapprima un cerchio inscritto di diametro 1, e poi, da ciascuna delle due regioni rimanenti, eliminiamo ancora un cerchio in essa inscritto (ossia tangente a tutte e tre le linee che la delimitano). Qual è l'area della parte residua?



A. $\frac{\pi}{6}$
B. $\frac{\pi}{8}$
C. $\frac{\pi}{12}$
D. $\frac{4}{25}\pi$
E. $\frac{4}{27}\pi$

(16) In una classe ci sono 10 tifosi tra Roma e Lazio. Delle seguenti frasi, si sa che esattamente una è *falsa*. Quale?

A. ci sono almeno 2 romanisti
B. i laziali sono non più di 5
C. non è vero che sono tutti romanisti
D. i romanisti sono almeno quanti i laziali
E. ci sono più di 3 laziali