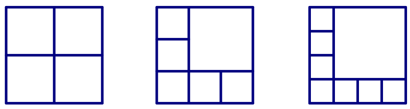
Roma, 19/3/2004 **PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA**

SOLUZIONI DELLA GARA INDIVIDUALE

(1) (a) La figura mostra delle suddivisioni in 4, 6, 8 quadrati. In generale, basta dividere due lati consecutivi del quadrato in $n \geqslant 2$ parti uguali e costruire i $2n-1$ quadrati corrispondenti. La parte rimanente è ancora quadrata, dunque abbiamo realizzato una suddivisione in $2n$ quadrati.

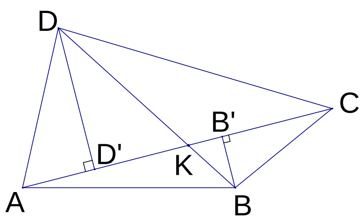
(b) Data una scomposizione in n quadrati, se dividiamo uno dei tasselli in 4 parti uguali, otteniamo una suddivisione del quadrato iniziale in $n+3$ parti quadrate. Da ciò e da quanto visto nella parte (a), segue immediatamente che un quadrato può essere scomposto in 4 quadrati o in qualsiasi numero di quadrati maggiore di 5. Si può infine verificare che non è realizzabile una scomposizione in 2, 3, o 5 parti quadrate.



(2) Seguendo la notazione indicata in figura, abbiamo che

$$\mathbf{area}(AKD) \cdot \mathbf{area}(BKC) = \frac{1}{2}\overline{AK} \cdot \overline{DD'} \cdot \frac{1}{2}\overline{CK} \cdot \overline{BB'}.$$

Tuttavia osserviamo che $\frac{1}{2}\overline{AK} \cdot \overline{BB'} = \mathbf{area}(BKA)$ e $\frac{1}{2}\overline{CK} \cdot \overline{DD'} = \mathbf{area}(DKC)$, pertanto i prodotti delle due coppie coincidono.



L'enunciato di questo problema, a nostro avviso semplice ed elegante, fu proposto tempo addietro dal "matematico dilettante" Mirko Brondi, scomparso da pochi anni, che ci fa piacere ricordare.

(3) (a) Supponiamo di aver ridotto ai minimi termini il numero razionale x. Se $2x - 3$ è intero, lo è anche $2x$, quindi il denominatore di x è un divisore di 2. Allo stesso modo, se $5x - 4$ è intero, lo è $5x$, ed il denominatore di x divide 5. Gli unici interi che dividono sia 2 che 5 sono 1 e -1, perciò x è intero.
(b) Se $5x - 4$ divide $2x - 3$, allora $5x - 4$ divide anche $2(5x - 4) - 5(2x - 3) = 7$. I divisori di 7 sono 1, -1, 7, -7. Il solo valore intero di x per il quale $5x - 4$ è uguale a uno di questi numeri è $x = 1$. In effetti, per $x = 1$ la frazione vale -1.

(4) Il quadrilatero $GC'CA$ è inscrivibile in una circonferenza, visto che $A\widehat{G}C' + C'\widehat{C}A = 120° + 60° = 180°$. Allora gli angoli alla circonferenza $A\widehat{C}G$ e $C'\widehat{C}G$ sono uguali, dal momento che sottendono le due corde uguali AG e $C'G$.