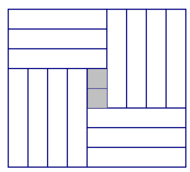
Roma, 19/3/2004 **PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA**

SOLUZIONI DELLA GARA A SQUADRE

dipartimenti di Matematica delle Università "La Sapienza" e "Roma Tre"

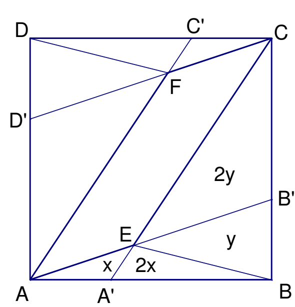
con il contributo dell'Unione Matematica Italiana e del CARFID

(1) La risposta corretta è la **B**. Non c'è modo di lasciare scoperte meno di 2 caselle perché la divisione di 72 per 5 ha resto 2. Per avere solo 2 caselle libere, basta disporre i tasselli secondo uno schema come quello in figura.



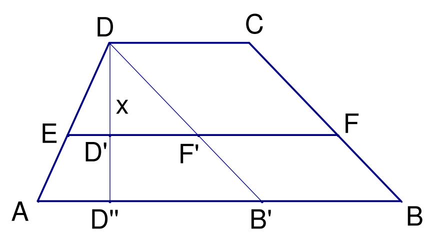
(2) La risposta corretta è la **C**. Il numero totale di questionari che possono essere riempiti in maniera differente è $n = 4 \cdot 3 \cdot 4 = 48$. Nel caso peggiore, Pierino si troverà 9 questionari per ognuna di tali possibilità: allora avrà $9n$ questionari senza che ve ne siano 10 riempiti allo stesso modo. Il successivo questionario dovrà per forza essere uguale a 9 dei precedenti, quindi se ne avranno 10 uguali. Il numero minimo cercato è dunque $9n + 1 = 433$.

(3) La risposta corretta è la **A**. Tracciamo i segmenti BE e DF. Il triangolo $EA'B$ ha area doppia di EAA', poiché il lato $A'B$ è doppio di AA', mentre l'altezza condotta da E su tali lati è sempre la medesima. Per lo stesso motivo, il triangolo $EB'C$ ha area doppia di EBB'. Chiamiamo x l'area di EAA' e y l'area di EBB', come indicato in figura. Per differenza, l'area del quadrilatero $AECF$ vale $1-2(3x+3y) = 1-6(x+y)$. Osservando i triangoli ABB' e $CA'B$, abbiamo che: $x + (2x + y) = \frac{1}{6}$ (cioè l'area di ABB') e $2y + (y + 2x) = \frac{1}{3}$ (cioè l'area di $CA'B$). Da tali equazioni si ricava che $x = 1/42$ e $y = 2/21$, pertanto l'area richiesta è $1 - 6 \cdot \frac{5}{42} = 2/7$.



(4) La risposta corretta è la **E**. Infatti, per ogni numero reale x abbiamo che $[x] \leqslant x$, e l'uguaglianza vale se e solo se x è intero. Quindi, per $1 \leqslant n \leqslant 2004$, si ha sempre $[n/2] + [n/3] + [n/4] \leqslant n/2 + n/3 + n/4$, e l'uguaglianza vale se e solo se 2, 3 e 4 sono divisori di n. Ciò accade se e solo se n è divisibile per 12 (il minimo comune multiplo di 2, 3, 4). Da 1 a 2004 ci sono 167 multipli di 12, visto che $2004/12 = 167$.

(5) La risposta corretta è la **B**. Come indicato in figura, conduciamo da D la parallela al lato BC, che incontra EF in F' e AB in B'. Siano D' e D'' le proiezioni ortogonali di D su EF e su AB. Poniamo poi $\overline{DD'} = x$, e sia $h = \overline{DD''}$ la misura dell'altezza: l'area del trapezio $ABCD$ risulta quindi $27h$ (esprimiamo le lunghezze in cm e le aree in cm^2). Il trapezio $EFCD$ è quindi scomposto nel parallelogramma $F'FCD$ e nel triangolo $EF'D$. L'area del parallelogramma $F'FCD$ è $15x$. L'area del triangolo $EF'D$ è $(\frac{x}{h})^2 \cdot 12h = \frac{12x^2}{h}$: infatti esso è simile al triangolo $AB'D$ (la cui area è $12h$), in un rapporto di similitudine $\frac{x}{h}$. L'area del trapezio $EFCD$ è dunque $15x + \frac{12x^2}{h}$ e vale l'equazione $15x + \frac{12x^2}{h} = \frac{27h}{6}$, ossia $8x^2 + 10hx - 3h^2 = 0$, da cui $x = \frac{h}{4}$. Ancora per similitudine, $\overline{EF'} = \frac{24}{4} = 6$, pertanto $\overline{EF} = 15 + 6 = 21$.



(6) La risposta corretta è la **E**. Il tentativo di portare le pedine nella zona indicata non andrà a buon fine. Infatti, dopo una qualsiasi delle mosse lecite, non cambia il colore della casella su cui viene a trovarsi la pedina spostata rispetto a prima della mossa. All'inizio, le nove pedine occupano 5 caselle nere e 4 bianche, quindi non è possibile che giungano ad occupare 4 caselle nere e 5 bianche. D'altra parte, è invece possibile spostare la pedina d'angolo, attraverso un'opportuna serie di mosse, il che esclude la risposta **D**. Aggiungiamo che, con un'analisi un po' più minuziosa, si può vedere che risulta impossibile anche trasferire il blocco di 9 pedine sull'altra estremità della stessa diagonale, sebbene quel quadrato sia formato da 5 caselle nere e 4 bianche (mentre si riesce a spostare l'intero gruppo di due caselle in diagonale).

(7) La risposta corretta è la **C**. Infatti $133 = 7 \cdot 19$, dunque esso divide $132!$ (moltiplicando i primi 132 interi, troviamo anche i fattori 7 e 19). Invece, i numeri 127, 131, 137 e 139 sono primi, quindi non possono dividere un prodotto di interi positivi più piccoli: quando un numero primo divide un prodotto di interi, deve dividerne almeno un fattore.

(8) La risposta corretta è la **D**. Se, al posto dei nuovi punteggi, si prendessero quelli vecchi, la squadra dei Guelfi verrebbe superata dai Ghibellini: ciò significa che i Guelfi perderebbero almeno 2 punti, vale a dire che essi hanno vinto almeno 2 partite. La circostanza descritta nel testo si verifica se i Guelfi hanno 6 punti che derivano da 2 vittorie (e hanno perso tutte le altre partite), mentre i Ghibellini hanno 5 punti ottenuti con 5 pareggi. Concludiamo che al campionato devono partecipare almeno 7 squadre: Guelfi, Ghibellini e le 5 squadre incontrate dai Ghibellini.

(9) La risposta corretta è la **A**. Ricordiamo intanto la *legge delle probabilità composte*: se X e Y sono due eventi, la probabilità che si realizzi l'evento composto $X \cap Y$ (ossia la congiunzione, o intersezione, dei due eventi, vale a dire il fatto che avvengano entrambi) risulta essere

$$\mathbf{prob}(X \cap Y) = \mathbf{prob}(X|Y) \cdot \mathbf{prob}(Y)$$

dove $\mathbf{prob}(X|Y)$ indica la probabilità che accada X assumendo il realizzarsi dell'evento Y.

Con i simboli $[BB]$, $[BN]$, $[NN]$ intenderemo le 3 possibili composizioni della scatola (cioè quella con 2 palline bianche, quella con 1 bianca e 1 nera, quella con 2 nere). A priori, le 3 possibilità sono equiprobabili, ed hanno tutte probabilità $\frac{1}{3}$. Il simbolo B_k (k intero) indicherà l'evento che all'estrazione k-esima venga sorteggiata una pallina bianca. Per simmetria, si ha che, a priori, $\mathbf{prob}(B_k) = \frac{1}{2}$: scambiando ciascuna pallina bianca con una nera e viceversa, la situazione rimane infatti immutata.

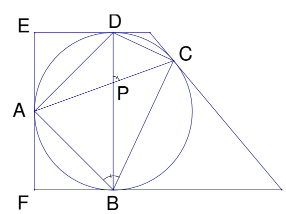
Il quesito chiede di determinare $\mathbf{prob}(B_2|B_1)$. In base alla legge delle probabilità composte, abbiamo che $\mathbf{prob}(B_2|B_1) = \dfrac{\mathbf{prob}(B_2 \cap B_1)}{\mathbf{prob}(B_1)}$. Ora calcoliamo $\mathbf{prob}(B_2 \cap B_1)$, cioè la probabilità di avere 2 palline bianche nelle prime 2 estrazioni dalla medesima scatola. Qualora la scatola scelta fosse la $[BB]$, la probabilità di trovarvi 2 palline bianche in 2 estrazioni sarebbe 1. Se la scatola scelta fosse la $[BN]$, tale probabilità sarebbe invece $(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$. Infine, se la scatola fosse la $[NN]$, la probabilità sarebbe 0. Nel complesso, abbiamo dunque:

$$\mathbf{prob}(B_2|B_1) = \frac{\frac{1}{3}\cdot 1 \,+\, \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} \,+\, \frac{1}{3}\cdot 0}{\frac{1}{2}} = \frac{5}{6}.$$

Vediamo anche un altro modo, forse più intuitivo, per giungere a questa conclusione. Dopo che Mario ha estratto una pallina bianca, sappiamo che l'effettiva composizione della scatola o è $[BB]$ o è $[BN]$. I due eventi, tuttavia, non sono più equiprobabili. Infatti, avevamo in tutto 6 palline, di cui 3 bianche, ciascuna con la stessa probabilità di essere sorteggiata. La prima pallina estratta o è una delle 2 palline bianche contenute nella scatola $[BB]$, oppure è la pallina bianca della scatola $[BN]$. Quindi, tale pallina bianca proviene con probabilità $\frac{2}{3}$ dalla $[BB]$ e con probabilità $\frac{1}{3}$ dalla $[BN]$. Ossia, dopo l'estrazione della prima pallina bianca, le probabilità di avere inizialmente scelto le scatole $[BB]$ e $[BN]$ sono, nell'ordine, $\frac{2}{3}$ e $\frac{1}{3}$. Qualora la scatola sia composta nel modo $[BB]$, sicuramente la seconda pallina estratta sarà ancora bianca, mentre, se la scatola è la $[BN]$, la probabilità che alla seconda estrazione si trovi la pallina bianca è $\frac{1}{2}$. In definitiva, la probabilità richiesta è pertanto: $\frac{2}{3}\cdot 1 \,+\, \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{5}{6}$.

(10) La risposta corretta è la **D**. Dato che i maschi biondi possono iscriversi, il sovrano deve essere o un maschio moro oppure una femmina bionda. In entrambi i casi, possono iscriversi soltanto i maschi biondi e le femmine more.

(11) La risposta corretta è la **C**. Sia O il centro del cerchio e sia EF il lato del trapezio perpendicolare alle basi. I quadrilateri $AODE$ e $BOAF$ sono due quadrati (ciascuno ha 3 angoli retti e 2 lati consecutivi uguali): perciò BD è un diametro del cerchio e $A\widehat{B}D = A\widehat{D}B = 45°$. Detto P il punto d'incontro delle diagonali AC e BD, si ha che $C\widehat{P}D = P\widehat{D}A + P\widehat{A}D = 45° + D\widehat{B}C = A\widehat{B}C$ (per il teorema sugli angoli alla circonferenza). In definitiva, l'angolo $C\widehat{P}D$ è di $70°$.



(12) La risposta corretta è la **A**. Le ultime 4 cifre di 11^{100} sono il resto della divisione di 11^{100} per $10000 = 10^4$. Sviluppiamo 11^{100} come $(1+10)^{100}$, secondo la formula del binomio di Newton:

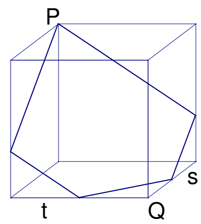
$$11^{100} = (1+10)^{100} = 1 + \binom{100}{1}10 + \binom{100}{2}10^2 + \binom{100}{3}10^3 + C$$

dove C è la somma di 97 addendi, ciascuno multiplo di 10^4. Inoltre abbiamo che

$$\binom{100}{3}10^3 = \frac{100\cdot 99\cdot 98}{3\cdot 2\cdot 1}\,10^3 = 33\cdot 49\cdot 10^5$$

è anch'esso divisibile per 10^4. Dunque le ultime 4 cifre di 11^{100} coincidono con le ultime 4 cifre del numero $1 + 100\cdot 10 + \dfrac{100\cdot 99}{2\cdot 1}\,100 = 1 + 1000 + 495\,000 = 496\,001$. Vorremmo inoltre segnalare che, nelle 5 alternative indicate nel quesito, i blocchi delle ultime 3 cifre sono tutti differenti: ragionando per esclusione, si poteva dunque dare la risposta giusta anche stabilendo solo le 3 cifre finali del numero (il che è un po' più rapido).

(13) La risposta corretta è la **D**. La situazione è illustrata in figura (pagina seguente). Dal vertice Q, come da ogni vertice, escono tre spigoli, ma non ha importanza quali sono i due spigoli s e t di cui si prendono i punti medi. Il piano considerato interseca l'interno di tutte le facce del cubo, tranne quella uscente da P e parallela agli spigoli s e t: la sezione ha quindi 5 lati.

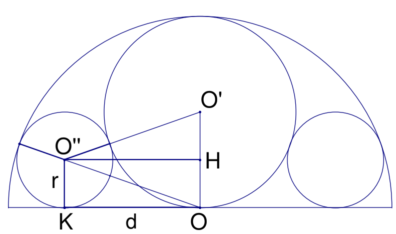


(14) La risposta corretta è la **C**. Sia $\mathbb{B}$ il bersaglio, e indichiamo con $(x, y) \in \mathbb{B}$ il punto colpito da Mr. Bean (dove $(0, 0)$ è il centro del bersaglio). Per visualizzare la situazione, immaginiamo che l'araldo di corte, dopo il lancio di Robin Hood, faccia un segno su un'asticella I di lunghezza 1 (che identifichiamo con l'intervallo $[0, 1]$), nel punto z che corrisponde alla distanza dal centro realizzata da Robin Hood. In base alle ipotesi fatte, z ha probabilità uniforme di trovarsi in qualsiasi parte dell'intervallo I, mentre (x, y) ha probabilità uniforme di trovarsi in qualsiasi parte del bersaglio $\mathbb{B}$. In termini geometrici, la terna (x, y, z) ha probabilità uniforme di trovarsi in qualsiasi zona del cilindro $\mathbb{B} \times I$. Le terne (x, y, z) che danno la vittoria a Mr. Bean sono quelle per cui $\sqrt{x^2 + y^2} < z$: esse formano un cono di base uguale a $\mathbb{B}$ e altezza 1. Pertanto, la probabilità che vinca Mr. Bean è uguale al rapporto tra i volumi di un cono e di un cilindro aventi stessa base e stessa altezza, ossia $1/3$.

(15) La risposta corretta è la **B**. Per iniziare, ricordiamo che la congiungente dei centri di due cerchi tangenti passa sempre per il loro punto di contatto, sia nel caso di cerchi tangenti esternamente che per cerchi tangenti internamente. Come indicato in figura, sia O il centro del semicerchio iniziale, sia O' il centro del cerchio di diametro 1 e sia O'' il centro di uno dei cerchi successivamente inscritti. Siano poi H e K, nell'ordine, le proiezioni di O'' su OO' e sul diametro del semicerchio. Poniamo $\overline{KO} = d$ e $\overline{KO''} = r$ (che è il raggio della circonferenza più piccola). Dal teorema di Pitagora, applicato ai triangoli $O''HO'$ e $O''HO$, abbiamo le uguaglianze:

$$d^2 + \left(\frac{1}{2} - r\right)^2 = \left(\frac{1}{2} + r\right)^2 \qquad\qquad d^2 + r^2 = (1 - r)^2.$$

Risolvendo il sistema, si ricava che $r = 1/4$, perciò l'area richiesta è $\frac{1}{2}\pi - \pi\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2\pi\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \dfrac{\pi}{8}$.



(16) La risposta corretta è la **E**. Detti R ed L i numeri dei romanisti e dei laziali, si ha $R + L = 10$. Ne segue che le frasi **B** (cioè $L \leqslant 5$) e **D** (vale a dire $R \geqslant L$) sono equivalenti, dunque sono entrambe vere (dato che solo una delle cinque è falsa). Pertanto, è vera anche la **A** ($R \geqslant 2$), che è conseguenza delle frasi **B** e **D**. Infine, l'affermazione **E** (ovvero: $L > 3$) implica la **C** ($R < 10$): quest'ultima, quindi, deve essere vera (se fosse falsa, sarebbe falsa anche la **E**). Si conclude che l'unica falsa dev'essere la **E**. Si noti che le cinque affermazioni sono fra loro compatibili (ad esempio nel caso $R = L = 5$), ma sappiamo per ipotesi che una di esse è falsa; inoltre non siamo in grado di stabilire i valori di R ed L (sono accettabili le coppie 9 e 1, 8 e 2, 7 e 3).