Roma, 15/3/2005 **PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA**

GARA INDIVIDUALE

Dipartimento di Matematica "G. Castelnuovo"
Università di Roma "La Sapienza"

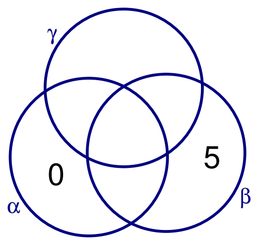
con il sostegno di: Unione Matematica Italiana, Istituto Nazionale di Alta Matematica

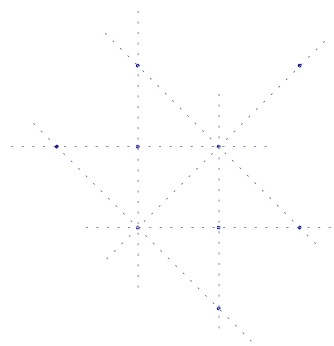
tempo a disposizione: 1 ora

1. a. Costruire, esternamente ad un rettangolo $ABCD$, i triangoli equilateri BCE e CDF. Dimostrare che AFE è un triangolo equilatero.
   b. Più in generale, far vedere che la stessa conclusione vale se $ABCD$ è un qualsiasi parallelogramma.

2. Le 3 circonferenze α, β, γ nella figura a sinistra delimitano 7 zone (non considerando la parte esterna). Si vogliono disporre in queste zone i numeri 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 (uno per zona, senza ripetizioni), in modo che sia costante la somma dei 4 numeri interni a ciascuno dei 3 cerchi.

   I numeri 0 e 5 sono già scritti. In quanti modi si può completare lo schema rispettando la condizione?





3. Preso un insieme di 9 punti distinti nel piano, sia n il numero delle rette che contengono esattamente 3 di questi punti. Come esempio, a destra è raffigurata una disposizione per cui $n = 7$.

   a. Trovare una disposizione dei 9 punti in modo da avere $n = 4$.
   b. Trovare una disposizione dei 9 punti in modo da avere $n = 8$.
   c. Trovare una disposizione dei 9 punti in modo da avere $n = 10$.

   [rappresentare le diverse configurazioni con dei disegni]

4. Nello spazio tridimensionale, sia T un tetraedro (piramide a base triangolare) e sia H un piano che interseca le rette dei 6 spigoli di T in un insieme di 6 punti distinti, che indicheremo con V.

   a. Far vedere che in V sono presenti delle terne di punti allineati.
   b. A quali terne di spigoli corrispondono tali terne di punti allineati?
   c. Raffigurare una possibile disposizione dell'insieme V sul piano H.

5. In un sistema di riferimento cartesiano, sia P un poligono di area maggiore di 1. Dimostrare che esistono due diversi punti (x, y) e (u, v) in P tali che $x - u$ e $y - v$ sono interi [uno dei due può essere nullo, non entrambi].