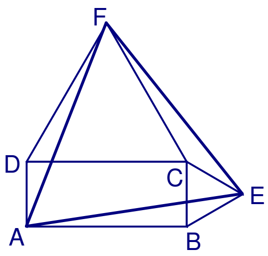
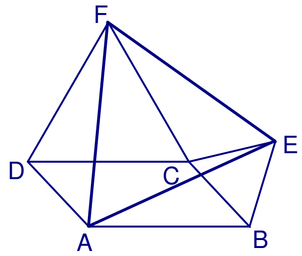
PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA
SOLUZIONI DELLA GARA INDIVIDUALE

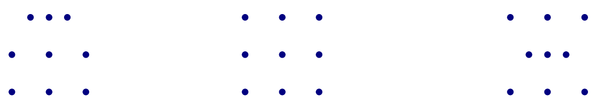
1. Sia nel caso del rettangolo, sia, più in generale, per un parallelogramma, i triangoli ABE, FDA, FCE sono uguali, dal momento che hanno uguali rispettivamente due lati e l'angolo compreso.



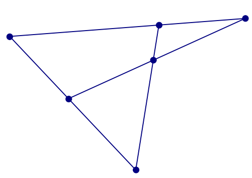


2. La somma dei quattro numeri contenuti nel cerchio α deve essere uguale alla somma dei quattro numeri contenuti nel cerchio β. Siccome i numeri 0 e 5 sono già dati e due zone sono in comune, nelle due restanti zone di α e β devono comparire due numeri che abbiano per differenza 5, cioè 6 (in α) e 1 (in β). Dobbiamo ancora usare i numeri 2, 3, 4. Guardiamo α e γ: per adesso la somma in α è 6 e in γ è 7. La zona centrale è in comune, perciò nelle altre due zone bisogna collocare due numeri consecutivi: 2 e 3 (in tal caso il 4 va nella parte comune a tutti i cerchi), oppure 3 e 4 (con il 2 che va nella parte comune). Si hanno così due disposizioni possibili.

3. Ecco tre configurazioni rispondenti alle tre richieste.



4.
   a. La retta contenente uno spigolo di T è contenuta nel piano di una faccia che sia adiacente allo spigolo. Intersecando uno di questi piani con H, si ottiene una retta, la quale contiene i 3 punti d'incontro fra gli spigoli della faccia e il piano H.
   b. Come detto, le terne di punti allineati di V provengono da spigoli adiacenti a una medesima faccia di T.
   c. I 6 punti di V dovranno essere disposti come indicato nella figura: ciascun punto (corrispondente a uno spigolo di T) dovrà appartenere a due diverse terne di punti allineati (corrispondenti alle due facce adiacenti allo spigolo), e dovranno esserci in tutto 4 terne di punti allineati in V (corrispondenti alle 4 facce del tetraedro T).



5. Consideriamo la divisione del piano nei quadretti che hanno come vertici i punti a coordinate intere. Più precisamente, per a e b interi, consideriamo il quadretto $Q_{(a,b)} = \{(x,y) | \, a \leqslant x < a+1 \text{ e } b \leqslant y < b+1\}$. Traslando ogni quadretto di questo tipo nel quadretto $Q = Q_{(0,0)}$, viene definita un'applicazione T dal piano verso Q. Osserviamo che $x-u$ e $y-v$ sono due numeri interi se e solo se $T(x,y) = T(u,v)$. Per ciascun quadretto, l'applicazione conserva l'area, in particolare $\mathsf{Area}(P \cap Q_{(a,b)}) = \mathsf{Area}(T(P \cap Q_{(a,b)}))$ per ogni (a,b). Poiché P ha area maggiore di 1 e invece Q ha area 1, alcuni dei pezzi $T(P \cap Q_{(a,b)})$ dovranno sovrapporsi. Pertanto esistono due punti distinti di P che vengono portati nello stesso punto di Q.