Roma, 11/3/2005 **PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA**

SOLUZIONI DELLA GARA A SQUADRE

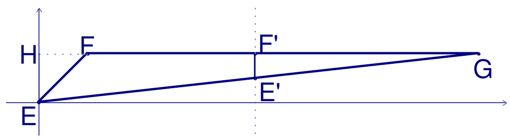
Dipartimenti di Matematica delle Università "La Sapienza" e "Roma Tre"

con il sostegno di: Unione Matematica Italiana, Istituto Nazionale di Alta Matematica

(1) Risposta corretta: B. Notiamo innanzitutto che è impossibile separare tutti i cubetti con meno di 6 tagli: infatti, un cubetto interno al cubo ha 6 facce che confinano con altri cubetti e, per separarlo dai suoi vicini, serviranno 6 tagli. Ora vediamo come ci si può organizzare affinché questi 6 tagli riescano a separare tutti quanti i cubetti. Cominciamo sezionando il cubo lungo i suoi 3 piani di simmetria paralleli alle facce. Si ottengono così 8 cubi più piccoli, ognuno di dimensioni $2\times2\times2$. Ora sovrapponiamo gli 8 cubi piccoli, formando una pila verticale $2\times2\times16$, ed eseguiamo ancora due tagli lungo i due piani di simmetria verticali. Con ciò abbiamo 32 parallelepipedi, ognuno di dimensioni $1\times1\times2$. Sovrapponiamo i 32 parallelepipedi appoggiandoli uno sull'altro, lungo le facce più grandi, e facciamo il sesto taglio a metà: così separiamo tutti i 64 cubetti.

(2) Risposta corretta: D. Una volta scelte le 3 pareti dove agganciare un festone, ci sono $3\cdot3\cdot3$ modi diversi per appenderlo, che corrispondono alle possibili scelte dei diversi ganci presenti in ciascuna delle pareti. Scegliere le 3 pareti a cui il festone viene legato equivale alla scelta della parete inutilizzata, quindi ci sono 4 possibilità. In tutto, abbiamo dunque bisogno di $4\cdot3^3=108$ festoni per esaurire tutte le possibilità.

(3) Risposta corretta: B. Dal momento che il triangolo EFG ha area 4, la richiesta equivale al fatto che i poligoni ottenuti abbiano entrambi area 2. La retta che cerchiamo dovrà intersecare il lato FG. Detti E' e F' (come in figura) i punti d'intersezione della retta con i lati del triangolo, se poniamo $\overline{F'G}=k$, abbiamo che $\overline{E'F'}=k/9$, per la similitudine dei triangoli $GF'E'$ e GHE. Abbiamo dunque la condizione $\frac{1}{2}\cdot k\cdot\frac{k}{9}=2$, da cui segue $k=6$. L'equazione della retta cercata è quindi $x=9-6=3$.



(4) Risposta corretta: A. Se poniamo $g(x)=a\,x^7+b\,x^3+c\,x$, si ha $f(x)=g(x)-5$. Osserviamo che $g(-x)=-g(x)$ qualunque sia x, poiché $g(x)$ contiene solo monomi di grado dispari. Essendo $f(-7)=g(-7)-5=7$, ricaviamo che $g(-7)=12$. Perciò $g(7)=-g(-7)=-12$ e $f(7)=g(7)-5=-12-5=-17$.

(5) Risposta corretta: C. Chiamiamo x il termine A_0 e y la differenza costante della progressione, in modo che, per ogni n, abbiamo $A_n=x+ny$. Affinché la successione sia costituita solo da numeri positivi, y deve essere un intero positivo (se y fosse nullo la successione sarebbe costantemente uguale a 133, e quindi $A_4+A_7=266$, se y fosse negativo avremmo prima o poi dei termini negativi). Le indicazioni fornite ci danno le relazioni

$$\begin{cases} x+k\,y & = 133 \\ (x+4y)+(x+7y) & = 250 \end{cases}$$

dove k è un certo indice da determinare. Eliminando la x, si ottiene $(2k-11)y=16$. Visto che y è un intero positivo, l'intero $2k-11$ dev'essere un divisore positivo di 16. Notiamo che $2k-11$ è sempre dispari e l'unico divisore positivo dispari di 16 è 1. Pertanto abbiamo $2k-11=1$, da cui $k=6$, $y=16$ e $x=133-6\cdot16=37=A_0$.

(6) Risposta corretta: A. Si tratta di una coppia di triangoli rettangoli isosceli, aventi ipotenusa $\frac{1}{2}$ (e relativa altezza $\frac{1}{4}$).

(7) Risposta corretta: D. Chiamiamo P_k il numero di decomposizioni dell'intero positivo k. Per determinare il valore di P_k, possiamo rappresentare il numero k come una sequenza di k palline. Scegliere una decomposizione di k equivale a scegliere dove collocare un separatore tra qualche coppia di palline attigue, in modo da dividere le palline in uno o più gruppi. Per esempio la sequenza $\bullet\bullet\bullet|\bullet|\bullet\bullet$ corrisponde alla decomposizione $6 = 3 + 1 + 2$, la sequenza $\bullet|\bullet|\bullet|\bullet|\bullet|\bullet$ corrisponde a $6 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$, mentre $\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet$ corrisponde a $6 = 6$.

Definire una decomposizione del numero k significa stabilire in quali spazi tra palline attigue collocare un separatore e in quali no. Gli spazi sono in tutto $k-1$, e per ciascuno di essi possiamo fare 2 scelte (metterci o non metterci il separatore). In tutto le scelte possibili sono dunque 2^{k-1} e corrispondono ciascuna a una differente decomposizione. Perciò abbiamo $\mathsf{P}_\mathsf{k} = 2^{\mathsf{k}-1}$ per ogni intero positivo k. In particolare, per $k = 6$ abbiamo 32 possibilità.

(8) Risposta corretta: C. Un quadrato massimo contenuto in R avrà un lato coincidente con il lato corto unitario. Dunque il rettangolo R_1 avrà lati 1 ed $a-1$. Poiché $a < 2$, un quadrato massimo in R_1 avrà lato di lunghezza $a-1$ e quindi il rettangolo R_2 avrà lati $a-1$ e $1-(a-1) = 2-a$. Questo rettangolo è simile a R se e solo se i due rettangoli hanno i lati in proporzione.

- Nel caso che il lato più breve di R_2 sia $a-1$ (per $a-1 < 2-a$, ossia $a < \frac{3}{2}$), dobbiamo avere $a : 1 = (2-a) : (a-1)$, da cui $a = \sqrt{2}\,(< \frac{3}{2})$.

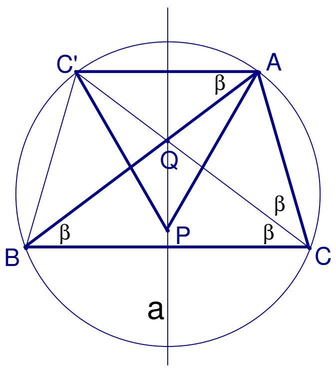
- Se invece $a > \frac{3}{2}$, il lato più breve di R_2 è $2-a$, e allora dobbiamo avere la proporzione $a : 1 = (a-1) : (2-a)$, da cui $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\,(> \frac{3}{2})$.

In tutto, ci sono quindi due soluzioni (vedi la figura).

(9) Risposta corretta: D. Le sole rette del tipo $y = k$ (con k intero) che intersecano l'interno del triangolo sono le rette $y = 1$, $y = 2$ e $y = 3$. Ricavando le equazioni dei lati del triangolo, si trova che ciascuna di tali rette contiene precisamente 1 punto a coordinate intere interno al triangolo.

Una soluzione meno laboriosa si ottiene eseguendo la trasformazione F del piano in sé che porta il punto di coordinate $(x; y)$ nel punto $(x-y; y)$ (trasformazione *affine*). Ad esempio, F trasforma il punto $(23; 5)$ nel punto $(18; 5)$. Tale trasformazione è biunivoca e porta punti a coordinate intere in punti a coordinate intere, e viceversa. Inoltre, essa trasforma rette in rette e triangoli in triangoli. Dunque il numero di punti interni al triangolo di vertici $(0; 0)$, $(2; 0)$, $(10^{24} + 1; 4)$ è uguale al numero dei punti interni al triangolo ottenuto dopo la trasformazione F, ossia interni al triangolo di vertici $(0; 0)$, $(2; 0)$, $(10^{24} - 3; 4)$. Applicando la trasformazione un buon numero di volte, ci si riduce infine al triangolo di vertici $(0; 0)$, $(2; 0)$, $(1; 4)$, giacché 10^{24} è multiplo di 4. Adesso non serve altro che un foglio di carta a quadretti.

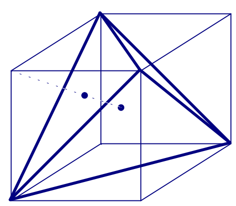
(10) Risposta corretta: B. Intanto osserviamo che il punto Q, intersezione dell'asse a e di AB, appartiene alla bisettrice di $A\widehat{C}B$: infatti, appartenendo ad a, è equidistante da B e C, quindi l'angolo $Q\widehat{C}B$ è β. Ora tracciamo la circonferenza γ, circoscritta al triangolo ABC, e prolunghiamo CQ fino ad intersecare γ in C'.



La retta a, essendo l'asse di una corda, passa per il centro di γ ed è un suo asse di simmetria. Le corde CA, AC', $C'B$ sono viste da B e da C sempre sotto lo stesso angolo β, pertanto esse sono tutte uguali. Ne segue in particolare che C' è il simmetrico di A rispetto all'asse a. Inoltre AC e AP (e quindi anche $C'P$ e $C'B$) sono uguali per come P è stato costruito. Concludiamo che il triangolo APC' è equilatero. Dal momento che $C'\widehat{A}B = \beta$ (infatti sottende la corda $C'B$) abbiamo che $P\widehat{A}B = 60° - \beta$. Siccome, per differenza, $B\widehat{A}C = 180° - 3\beta$, abbiamo trovato che $P\widehat{A}B = \frac{1}{3}B\widehat{A}C$.
A questo punto, si vede anche che le restanti alternative sono tutte false: la A in maniera ovvia, mentre la C, la D e la E equivalgono tutte ad avere $\beta = 30°$, ovvero al fatto che ABC sia la metà di un triangolo equilatero (in tal caso P è centro di γ e punto medio di BC).

(11) Risposta corretta: B. Per le proprietà di $\looparrowright$, si ha $5 \looparrowright 0 = 25 = 5 \looparrowright 5 = 5 \looparrowright 10 = \ldots = 5 \looparrowright 200$. Inoltre (in base alla terza proprietà) $5 \cdot (200 \looparrowright 5) = 200 \cdot (5 \looparrowright 200) = 200 \cdot 25$, con cui si trova $200 \looparrowright 5 = 1000$.
Possiamo notare che, per ogni coppia di interi a, b, risulta $a \looparrowright b = a \cdot \mathrm{MCD}(a, b)$ [...e dunque, sebbene originale, non sembrerebbe trattarsi di un'operazione particolarmente nuova...].

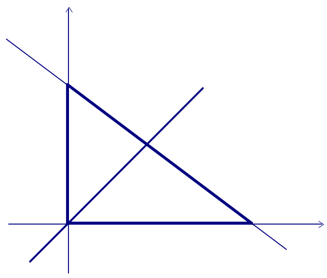
(12) Risposta corretta: E. Partiamo da un cubo inscritto in una sfera. Sia A uno dei vertici del cubo, adiacente ai vertici B, C, D. Indichiamo con $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$, $\widetilde{C}$, $\widetilde{D}$ i rispettivi vertici opposti. I punti A, $\widetilde{B}$, $\widetilde{C}$, $\widetilde{D}$ sono vertici di un tetraedro regolare (come anche $\widetilde{A}$, B, C, D), dal momento che tutti gli spigoli sono pari a $\sqrt{2}$ volte lo spigolo del cubo. La sfera in cui è inscritto il tetraedro (che è unica) è la stessa in cui è inscritto il cubo.

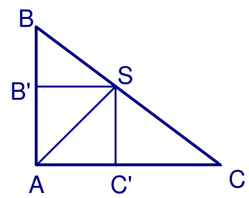


Prendiamo una faccia di questo tetraedro, per esempio la faccia $\widetilde{B}\widetilde{C}\widetilde{D}$. Sia il centro del cubo, sia il baricentro della faccia, sia il vertice A, sia il vertice $\widetilde{A}$ sono equidistanti dai punti $\widetilde{B}$, $\widetilde{C}$, $\widetilde{D}$, e pertanto sono allineati [dati 3 punti non allineati nello spazio, l'insieme dei punti da essi equidistanti è la retta passante per il loro circocentro e ortogonale al piano che li contiene].

Analogo discorso vale per tutte le 4 facce del tetraedro. Ciò prova che le semirette di origine nel centro di un tetraedro regolare e passanti per i baricentri delle facce incontrano la superficie della sfera circoscritta nei 4 punti che sono i simmetrici dei vertici opposti rispetto al centro del tetraedro. Gli 8 punti sono i vertici di un cubo.

(13) Risposta corretta: A. Possiamo introdurre un sistema di riferimento, in maniera che i tre vertici del triangolo abbiano coordinate $(0;0)$, $(40;0)$, $(0;30)$ (figura a sinistra). L'equazione della retta contenente l'ipotenusa è allora $\frac{x}{40}+\frac{y}{30}-1=0$. La bisettrice dell'angolo retto ha equazione $y=x$. Queste rette si incontrano nel punto $(\frac{120}{7};\frac{120}{7})$, la cui distanza dall'origine è $\frac{120}{7}\sqrt{2}$.





In alternativa, si può ragionare così (figura a destra). Detta AS la bisettrice, supponiamo che sia $\overline{AB}=30$ e $\overline{AC}=40$. Tracciamo le parallele ai cateti per il punto S. Le intersezioni con i cateti determinano un quadrato $AC'SB'$. Allora, se indichiamo con x il lato di questo quadrato, i triangoli $BB'S$ e $SC'C$ sono simili, quindi abbiamo la proporzione $(30-x):x=x:(40-x)$. Da ciò si ottiene $x=\frac{120}{7}$.

(14) Risposta corretta: B. Calcoliamo la probabilità che escano 3 numeri differenti. Qualunque sia il risultato del primo lancio, ci sono 5 possibilità su 6 che il secondo dado dia un numero diverso dal primo, e, se ciò accade, ci sono 4 possibilità su 6 che il terzo dado dia un esito diverso dai primi due. Per la legge delle probabilità composte, la probabilità di avere tre numeri differenti è quindi $\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{6}=\frac{5}{9}$. Pertanto la probabilità che gli esiti non siano tutti diversi è $1-\frac{5}{9}=\frac{4}{9}$.

(15) Risposta corretta: E. Può essere utile rappresentare le informazioni nel modo seguente:

$$\text{non}\,A \Rightarrow \text{non}\,B, \qquad B \Leftrightarrow \text{non}\,C, \qquad A \Rightarrow C,$$

dove A significa "Andrea va al cinema", e così via. Intanto è bene notare che $\text{non}\,A \Rightarrow \text{non}\,B$ equivale a $B \Rightarrow A$. Supponiamo che Carlo non vada al cinema: da $\text{non}\,C$ segue B, ma da B segue A e da A segue C. Pertanto, supponendo che Carlo non vada al cinema, dovremmo concludere che Carlo va al cinema, cadendo in contraddizione. Se ne deduce che Carlo deve andare al cinema e che Barbara non ci va, mentre non possiamo affermare nulla su Andrea.