

Roma, 17/3/2006

PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA – SEZIONE DI ROMA

PROVA INDIVIDUALE

Dipartimento di Matematica “G. Castelnuovo”
Università di Roma “La Sapienza”

con il sostegno di:

Unione Matematica Italiana, Istituto Nazionale di Alta Matematica,
Progetto Lauree Scientifiche, CARFID

tempo a disposizione: 1 ora e 30 minuti

- (1) a. Una piramide e un prisma hanno, ciascuno, 8 vertici.
Il numero delle facce della piramide è maggiore, uguale, o minore del numero delle facce del prisma?
Il numero degli spigoli della piramide è maggiore, uguale, o minore del numero degli spigoli del prisma?
b. Come variano le risposte precedenti se consideriamo, più in generale, una piramide e un prisma aventi lo stesso numero di vertici?
- (2) a. Fattorizzare il polinomio $x^3(y - z) + y^3(z - x) + z^3(x - y)$ in polinomi di 1° grado.
b. Stabilire qual è il massimo intero che divide tutti i numeri del tipo $m^3(n - p) + n^3(p - m) + p^3(m - n)$, dove m, n, p sono numeri interi.
- (3) Sono date due circonferenze di centri O_1 e O_2 , una esterna all'altra. Una tangente comune le tocca nei punti A_1 e A_2 rispettivamente, lasciandole entrambe nello stesso semipiano. Il segmento O_1O_2 interseca le circonferenze nei punti B_1 e B_2 , rispettivamente. Sia inoltre C il punto di intersezione delle rette A_1B_1 e A_2B_2 , e sia D il punto su A_1A_2 tale che CD è perpendicolare a B_1B_2 .
 - a. Dimostrare che $DA_1 = DC = DA_2$.
 - b. Dimostrare che A_1B_1 e A_2B_2 sono perpendicolari.
- (4) Riccardo è in gita turistica nella modernissima città di New Tivoli.
New Tivoli è molto vasta e si estende all'infinito in ogni direzione.
Tutte le strade sono diritte e orientate lungo l'asse Nord-Sud o lungo l'asse Est-Ovest.
Tutti gli isolati sono dei quadrati identici.
A mezzogiorno Riccardo ha appena passato un incrocio e si sta dirigendo verso Nord. Ad ogni incrocio, egli continua ad andare dritto oppure, con uguale probabilità, volta a sinistra.
 - a. Dimostrare che, dopo 1000 incroci, la probabilità che Riccardo sia orientato verso Ovest è uguale alla probabilità che sia orientato verso Est.
 - b. Calcolare la probabilità che, dopo 1000 incroci, Riccardo sia orientato verso Est.