GARA A SQUADRE

Dipartimenti di Matematica delle Università "La Sapienza" e "Roma Tre"
con il sostegno di:
Unione Matematica Italiana, Istituto Nazionale di Alta Matematica
Progetto Lauree Scientifiche, CARFID

(1) Sopra il tavolo di un mago sono appoggiate quattro carte. Su ogni faccia di ciascuna carta è scritto un numero intero positivo. Le carte ci appaiono come nella figura seguente.

$$\boxed{3} \quad \boxed{4} \quad \boxed{5} \quad \boxed{6}$$

Il mago afferma che, se in una delle due facce di una carta è scritto un numero pari, allora nella faccia opposta di quella carta c'è un multiplo di 3.
Per controllare se il mago dice il vero, sarà sufficiente rovesciare le carte che mostrano i numeri

A. 3 e 5
B. 4 e 6
C. 3, 5, 6
D. 4, 5, 6
E. 3, 4, 6

(2) Prendiamo in considerazione quei numeri interi di 6 cifre, nei quali compaiono, in qualche ordine, tutte le cifre 1, 2, 3, 4, 5, 6, in modo che il numero formato dalle prime k cifre da sinistra sia multiplo di k, per ogni k da 1 a 6. Ad esempio, le prime 2 cifre devono dare un multiplo di 2, le prime 3 cifre un multiplo di 3, e così via.
Quanti sono i numeri con questa proprietà?

A. nessuno
B. 1
C. 2
D. 3
E. 4

(3) Diremo che un numero intero n è *disparato* se esso rispetta la seguente proprietà:

$$\boxed{\text{se un intero } x\text{, diverso da 1, è un divisore di } n\text{, allora } x \text{ è pari}}.$$

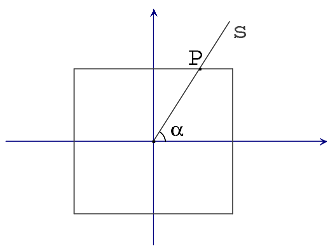
Quanti sono i numeri disparati maggiori di 100 e minori di 200?

A. nessuno
B. 1
C. 24
D. 49
E. 50

(4) Un triangolo equilatero LMN è inscritto in una circonferenza γ. Detto O il centro della circonferenza simmetrica di γ rispetto alla retta LM, il quadrilatero $LOMN$

A. è un trapezio
B. è un parallelogramma
C. ha due angoli retti
D. ha lo stesso perimetro di un quadrato inscritto in γ
E. ha la stessa area di un quadrato inscritto in γ

(5) In un riferimento cartesiano, si consideri il quadrato di vertici $(1;1)$, $(-1;1)$, $(-1;-1)$, $(1;-1)$, e una semiretta s uscente dall'origine. Sia α l'angolo che la semiretta s forma con l'asse x (orientato in senso antiorario). Se P è il punto di intersezione di s con i lati del quadrato, all'angolo α facciamo corrispondere l'ascissa h_α del punto P.



Quanti valori di α (compresi tra 0° e 360°) soddisfano l'equazione $(h_\alpha)^2 = -h_\alpha$?

A. nessuno
B. 1
C. 2
D. 3
E. infiniti

(6) Si consideri l'equazione $1 + 20\,m^3 = 3\,n^2$ con m, n numeri interi.
Quale delle seguenti affermazioni è vera?

A. non esistono soluzioni
B. esiste precisamente una soluzione dove m e n sono entrambi minori di 100
C. esiste almeno una soluzione dove m e n sono entrambi maggiori di 1000
D. per ogni numero primo p, esiste una soluzione in cui m è multiplo di p
E. per ogni numero primo $p \neq 2$, esiste una soluzione in cui n è multiplo di p

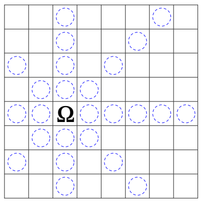
(7) Un triangolo $\mathcal{T}$ ha area $36\,\text{cm}^2$ e perimetro $30\,\text{cm}$. Sia $\mathcal{T}'$ il simmetrico di $\mathcal{T}$ rispetto al suo baricentro.
Con queste informazioni, possiamo determinare l'area ed il perimetro del poligono $\mathcal{T} \cup \mathcal{T}'$ (l'unione di $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}'$)?

A. possiamo determinare l'area, ma non il perimetro
B. possiamo determinare il perimetro, ma non l'area
C. sì: l'area è $48\,\text{cm}^2$, il perimetro $40\,\text{cm}$
D. sì: l'area è $44\,\text{cm}^2$, il perimetro $48\,\text{cm}$
E. sì: l'area è $54\,\text{cm}^2$, il perimetro $45\,\text{cm}$

(8) Con la sua cinepresa, Gianni realizza un filmino di una gara di velocità. La corsa dura 56 secondi. Gianni non sa di avere le pile un po' scariche, e che quindi, invece dei normali 24 fotogrammi al secondo, ne scorrono solo 21.
Rivedendo il filmino con un proiettore che funziona correttamente, quanti secondi durerà la gara?

A. 48
B. 49
C. 56
D. 64
E. 72

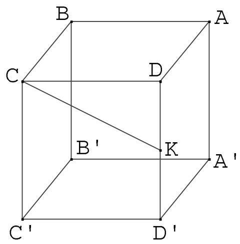
(9) Nel gioco degli scacchi la regina controlla tutte le caselle raggiungibili con uno spostamento in orizzontale, in verticale o in diagonale a partire dalla posizione in cui si trova. Nello spostamento si può attraversare un qualsiasi numero di caselle intermedie.



Quante regine, come minimo, occorrono per controllare un'intera scacchiera 4×4 (con 16 caselle)?

A. 1
B. 2
C. 3
D. 4
E. 5

(10) Dato un cubo di vertici $ABCDA'B'C'D'$, come in figura, sia K il punto medio dello spigolo DD'. Consideriamo due piani paralleli che contengono rispettivamente CK e $A'D'$.



Assumendo che lo spigolo del cubo abbia lunghezza 1, qual è la distanza tra i due piani paralleli?

A. $1/3$
B. $1/\sqrt{5}$
C. $1/2$
D. $1/\sqrt{3}$
E. $1/\sqrt{2}$

(11) Il punto P si trova a distanza 9 dal centro di una circonferenza di raggio 15.
Quante corde della circonferenza sono divise da P in due segmenti di lunghezza intera?

A. 2
B. 4
C. 6
D. 8
E. 15

(12) Lucia, una ragazza di 15 anni, ha un fratellino di nome Paolo ed è appassionata di numeri. Si è accorta che, dividendo l'età di Paolo per l'età della loro nonna Giuditta, si ottiene un numero dove appare infinite volte la propria stessa età: $0,151515... = 0,\overline{15}$.
Quanti anni ha Paolo? [Le età sono espresse da numeri interi.]

A. 6
B. 7
C. 9
D. 10
E. 12

(13) Consideriamo le tre seguenti affermazioni.

Esiste un numero $K > 0$ tale che $(x+y)^2 < K\,xy$ per ogni coppia di numeri reali $x, y > \frac{1}{10}$.

Esiste un numero $K > 0$ tale che $x+y < K\,xy$ per ogni coppia di numeri reali $x, y > \frac{1}{10}$.

Esiste un numero $K > 0$ tale che $(x+y)^2 > K\,xy$ per ogni coppia di numeri reali $x, y > \frac{1}{10}$.

Nell'ordine, esse risultano:

A. falsa, falsa, vera
B. vera, falsa, falsa
C. falsa, vera, falsa
D. falsa, vera, vera
E. vera, falsa, vera

(14) Il polinomio $p(x) = x^3 - 6x + 1$ ha tre radici reali, che indichiamo con u, v, w.
Se il polinomio $q(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ ha per radici i numeri u^2, v^2, w^2, quanto vale $a+b+c$?

A. -1
B. 0
C. 17
D. 20
E. 23

(15) Un cubo è formato da $3 \times 3 \times 3$ cubetti di spigolo 1.
Quante sono le coppie di cubetti i cui centri si trovano a distanza uguale a 3? [Si intende che il segmento che congiunge i centri abbia lunghezza 3.]

A. nessuna
B. 6
C. 12
D. 24
E. 48

(16) Alice e Barbara fanno questo gioco: c'è un mucchio di monete su un tavolo e, a turno, ciascuna delle due sceglie se toglierne 4 oppure 7 [è ammesso anche svuotare il tavolo, se ci sono 4 o 7 monete]. Perde chi, al proprio turno, non è più in grado di eseguire alcuna mossa, poiché sono rimaste meno di 4 monete.
Fanno in tutto tre partite, ed è sempre Alice a cominciare. La prima volta ci sono inizialmente 55 monete, la seconda volta 69, la terza 76.
Chi vincerà le tre partite, giocando in maniera ottimale?

A. rispettivamente: Barbara, Barbara, Alice
B. rispettivamente: Alice, Barbara, Alice
C. rispettivamente: Barbara, Alice, Barbara
D. rispettivamente: Barbara, Alice, Alice
E. rispettivamente: Alice, Alice, Barbara