

SOLUZIONI DELLA PROVA INDIVIDUALE

- (1) a. La piramide ha per base un poligono con 7 vertici e 7 lati; dunque ha 8 facce e 14 spigoli. Invece il prisma ha per base un quadrilatero (e pertanto è un parallelepipedo); dunque ha 6 facce e 12 spigoli. Quindi, la piramide ha più facce e più spigoli del prisma.

- b. Per il caso generale, ricordiamo in primo luogo che il numero dei vertici di un prisma è pari, ed è sempre maggiore o uguale a 6. Consideriamo dunque una piramide e un prisma che abbiano, ciascuno, $2n$ vertici (con $n \geq 3$): allora la piramide ha per base un poligono con $2n - 1$ lati; dunque ha $2n$ facce e $2(2n - 1)$ spigoli. Invece il prisma ha per base un poligono con n lati; dunque ha $n + 2$ facce e $3n$ spigoli. Concludiamo che, anche nel caso generale, la piramide ha più facce e più spigoli del prisma: infatti, per $n \geq 3$ si ha $2n > n + 2$ e $2(2n - 1) > 3n$.

Si tenga presente che i numeri v, s, f dei vertici, delle facce, degli spigoli di un poliedro soddisfano la relazione di Eulero $v - s + f = 2$.

- (2) a. Chiamiamo P il polinomio assegnato $x^3(y - z) + y^3(z - x) + z^3(x - y)$.

Immaginando di aver fissato i valori di due variabili, ad esempio y e z , se alla variabile x attribuiamo uno di questi valori, ad esempio $x = y$, vediamo che il polinomio P si annulla. Siccome ciò vale comunque si siano fissati y e z , concludiamo, per il teorema di Ruffini, che il polinomio P è divisibile per i binomi $(y - x)$, $(x - z)$, e ugualmente anche per $(z - y)$. Dunque esso è divisibile per il prodotto $(z - y)(y - x)(x - z)$, e pertanto $P = (z - y)(y - x)(x - z)Q$, dove Q è un polinomio di 1° grado (poiché P è di 4° grado).

Per determinare Q , basta osservare che si ha $Q = \frac{x^3(y-z)+y^3(z-x)+z^3(x-y)}{(z-y)(y-x)(x-z)}$ e che tale espressione è simmetrica, nel senso che, se in essa si scambiamo due qualsiasi delle variabili, l'espressione resta invariata. Gli unici polinomi simmetrici di primo grado sono quelli della forma $K(x + y + z)$, dove K è una costante.

Pertanto $P = K(z - y)(y - x)(x - z)(x + y + z)$. Confrontando i coefficienti, si ricava che $K = 1$.

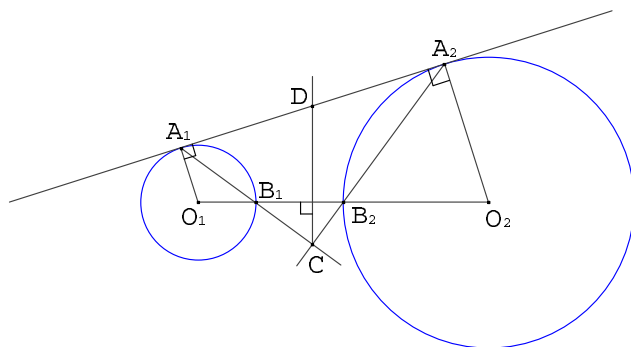
In conclusione, $x^3(y - z) + y^3(z - x) + z^3(x - y) = (z - y)(y - x)(x - z)(x + y + z)$.

- b. Si vede facilmente che $m^3(n - p) + n^3(p - m) + p^3(m - n) = (p - n)(n - m)(m - p)(m + n + p)$ è sempre divisibile per 2 e per 3, dunque per 6.

Infatti, due dei tre numeri m, n, p dovranno essere entrambi pari o entrambi dispari, e la loro differenza sarà pari. Inoltre, se dividiamo m, n, p per 3 o troviamo tre resti diversi (e allora $m + n + p$ è divisibile per 3), o due dei resti sono uguali (nel qual caso la loro differenza è divisibile per 3).

Infine, sostituendo per esempio i valori $m = 2, n = 1, p = 0$, si ottiene proprio 6, dunque è 6 il massimo intero che divide tutti i numeri anzidetti.

- (3) a. Abbiamo $O_1A_1 = O_1B_1$ e $O_1\widehat{A_1}B_1 = O_1\widehat{B_1}A_1$. Nel triangolo A_1DC gli angoli in A_1 e in C sono uguali, perché complementari allo stesso angolo (si ricordi che CD è perpendicolare a B_1B_2). Quindi $DC = A_1D$. Lo stesso ragionamento si ripete per l'altra circonferenza, quindi $A_1D = DC = A_2D$.



- b. Per quanto visto, l'angolo $A_1\widehat{C}A_2$ è uguale alla somma degli altri due angoli del triangolo A_1CA_2 , perciò esso è retto.
- (4) Sia N il numero degli incroci incontrati da Riccardo, nel nostro caso $N = 1000$. Data la successione degli incroci $1, \dots, N$, sia I il sottoinsieme di $\{1, \dots, N\}$ delle volte in cui Riccardo ha girato a sinistra. L'insieme I determina il percorso della passeggiata; i percorsi possibili sono in tutto 2^N . Detta n la cardinalità di I , ovvero il numero delle volte in cui Riccardo ha girato a sinistra, poniamo $n = 4m + r$, con $0 \leq r \leq 3$. Aggiungere 4 svolte a sinistra non muta la direzione verso cui si dirige Riccardo. Pertanto:
- se $r = 0$, allora Riccardo è diretto verso Nord;
 - se $r = 1$, allora Riccardo è diretto verso Ovest;
 - se $r = 2$, allora Riccardo è diretto verso Sud;
 - se $r = 3$, allora Riccardo è diretto verso Est.

Sia dunque N_0 il numero dei sottoinsiemi di $\{1, \dots, N\}$ di cardinalità multipla di 4, e analogamente siano N_1, N_2, N_3 , nell'ordine, i numeri dei sottoinsiemi di $\{1, \dots, N\}$ la cui cardinalità è un intero di tipo $4m + 1, 4m + 2, 4m + 3$. Dopo N incroci quindi Riccardo si dirige:

- verso Nord con probabilità $N_0/2^N$;
- verso Ovest con probabilità $N_1/2^N$;
- verso Sud con probabilità $N_2/2^N$;
- verso Est con probabilità $N_3/2^N$.

Ora possiamo rispondere alle due domande.

- a. Essendo 1000 un multiplo di 4, $N_1 = N_3$. Infatti se I è un sottoinsieme per cui $r = 1$, allora per il complementare di I , cioè $I^c = \{1, \dots, N\} - I$, si ha $r = 3$. Abbiamo così definito una corrispondenza biunivoca tra i sottoinsiemi di $\{1, \dots, N\}$ per cui $r = 1$ e quelli per cui $r = 3$, e dunque $N_1 = N_3$.
- b. La probabilità $N_3/2^N$ è $\frac{1}{4}$. Avendo visto nel punto [a] che $N_1 = N_3$, per concludere basta osservare che $N_1 + N_3 = N_0 + N_2$. Ciò è vero perché, in qualsiasi insieme X finito e non vuoto, i sottoinsiemi di cardinalità pari sono quanti i sottoinsiemi di cardinalità dispari. Per verificare questo fatto, fissiamo un qualunque elemento x_o di X . Un sottoinsieme di cardinalità pari di X o non contiene x_o (e dunque è dato da un sottoinsieme di cardinalità pari di $X - \{x_o\}$), oppure contiene x_o (nel qual caso è dato dall'unione di $\{x_o\}$ con un sottoinsieme di cardinalità dispari di $X - \{x_o\}$). Nel complesso, quindi, i sottoinsiemi di cardinalità pari di X sono tanti quanti il totale dei sottoinsiemi di $X - \{x_o\}$, che sono la metà dei sottoinsiemi di X . [E' bene sottolineare che, nelle precedenti considerazioni, fra i sottoinsiemi di un qualsiasi insieme è compreso anche l'insieme vuoto, il quale possiede un numero pari di elementi.]