PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA

SOLUZIONI DELLA GARA A SQUADRE

Dipartimenti di Matematica delle Università "La Sapienza" e "Roma Tre"

con il sostegno di:
Unione Matematica Italiana, Istituto Nazionale di Alta Matematica,
Progetto Lauree Scientifiche, CARFID

(1) Risposta corretta: D. Occorre rovesciare le carte 4 e 6 perché, essendo pari, bisogna controllare che sul retro ci sia effettivamente un multiplo di 3. D'altra parte, vanno rovesciate anche le carte 4 e 5, che non sono multipli di 3: se sul retro ci fosse un numero pari, l'affermazione sarebbe falsa. In conclusione, vanno rovesciate le carte 4, 5, 6. L'altra faccia della carta 3 è invece ininfluente: qualunque essa sia, non può contraddire l'affermazione del mago.

(2) Risposta corretta: C. Le cifre 2, 4, 6 dovranno necessariamente collocarsi in una delle posizioni 2^a, 4^a, 6^a. La 5^a cifra dovrà essere 5. La 1^a e la 3^a cifra, che sono dispari, dovranno essere 1 oppure 3. La seconda cifra sarà 2, 4 o 6. Allora le prime 3 cifre, per dare un multiplo di 3, devono essere 123 oppure 321. A questo punto vediamo che la 4^a cifra è 6. Concludiamo che solo 123654 e 321654 soddisfano le condizioni richieste.

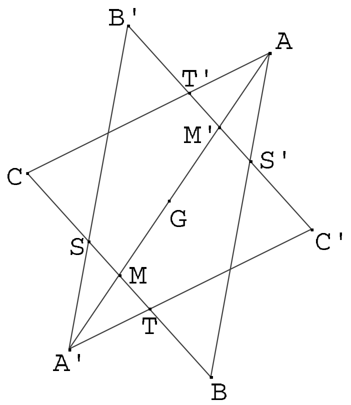
(3) Risposta corretta: B. I numeri disparati sono le potenze di 2: tutti gli altri interi maggiori di 1 sono divisibili per almeno un numero primo dispari. Tra un numero e il suo doppio, c'è sempre precisamente una potenza di 2, in questo caso 128.

(4) Risposta corretta: C. In un triangolo equilatero, la distanza di un lato dal centro della circonferenza circoscritta è la metà del raggio. Pertanto, il punto O appartiene alla circonferenza circoscritta, quindi gli angoli in L e M sono retti perché NO è un diametro. Si può verificare piuttosto agevolmente che le altre alternative sono false.

(5) Risposta corretta: E. La relazione $(h_\alpha)^2 = -h_\alpha$ vale per $h_\alpha = 0, -1$. Abbiamo $h_\alpha = 0$ per $\alpha = 90°, 270°$ e $h_\alpha = -1$ per $135° \leqslant \alpha \leqslant 225°$. Ci sono dunque infiniti valori.

(6) Risposta corretta: A. Qualunque sia m, il numero $1 + 20m^3$ è dispari, quindi, in un'eventuale soluzione, anche n dovrebbe essere dispari. Il numero n^2, essendo il quadrato di un numero dispari, è del tipo $4h + 1$: infatti abbiamo che $(2j + 1)^2 = 4j^2 + 4j + 1 = 4(j^2 + j) + 1$. Perciò $3n^2$ è un intero del tipo $4k + 3$, al contrario del numero a sinistra $1 + 20m^3$ che è invece della forma $4t + 1$.

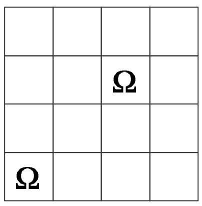
(7) Risposta corretta: C. Indichiamo con A, B, C i vertici del triangolo $\mathcal{T}$ e con A', B', C' i simmetrici rispetto al baricentro G. Innanzitutto osserviamo che i lati AB, BC, CA sono rispettivamente uguali e paralleli a $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$. Inoltre i segmenti AA', BB', CC', passanti per il baricentro G comune ai due triangoli, sono mediane per entrambi i triangoli $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}'$.



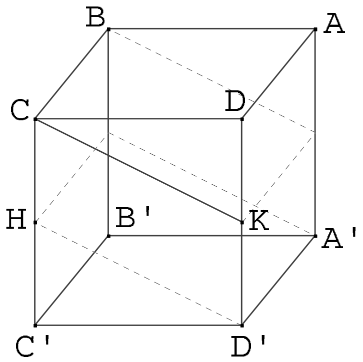
Ne segue che i punti indicati in figura con M e M' sono i punti medi di BC e $B'C'$, e, per similitudine, anche di ST e $S'T'$. Ora il triangolo $AS'T'$ è simile a ABC e la sua mediana AM' è $1/3$ della mediana AM, dal momento che $GM = GM' = \frac{1}{3}A'M' = \frac{1}{3}AM$. Pertanto tutti i lati di $AS'T'$ sono $1/3$ dei lati omologhi di ABC e l'area di $AS'T'$ è $1/9$ di ABC. Lo stesso vale per tutti i 6 triangoli che hanno per vertici i punti A, B', C, A', B, C': sono tutti triangoli uguali, ed i triangoli $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}'$ si tagliano dividendo ogni lato in 3 parti uguali. L'area di $\mathcal{T} \cup \mathcal{T}'$, in cm^2, è perciò $36 + 3 \cdot \frac{1}{9} \cdot 36 = \frac{4}{3} \cdot 36 = 48$. Per quanto riguarda il perimetro si ottiene (sempre in cm) $30 + 30 - \frac{2}{3} \cdot 30 = \frac{4}{3} \cdot 30 = 40$: infatti, se sommiamo i perimetri di $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}'$, dobbiamo poi sottrarre il perimetro dell'esagono $\mathcal{T} \cap \mathcal{T}'$, che viene a trovarsi all'interno.

(8) Risposta corretta: B. In 56 secondi vengono filmati $56 \cdot 21$ fotogrammi in tutto. Rivedendone 24 al secondo, si impiegano $\frac{56 \cdot 21}{24} = 49$ secondi.

(9) Risposta corretta: B. Immaginiamo le caselle della scacchiera colorate come di consueto in bianco e nero. Una regina controlla tutte le caselle della prima cornice intorno a sé, ma, nella seconda cornice, può controllare solo le caselle di colore uguale alla sua. Una regina dunque non basta. Due regine sono invece sufficienti, ad esempio collocandole in questo modo.



(10) Risposta corretta: B. Se due rette r, s non sono parallele, per ciascuna di esse passa un solo piano parallelo all'altra retta, e questi piani sono tra loro paralleli. L'esistenza di tali piani è chiara: basta traslare la retta r in modo che risulti incidente a s, e viceversa. Nel caso in esame, le rette CK e $A'D'$ non sono parallele. I piani paralleli che le contengono sono quelli passanti per C, K, B e per A', D', H, dove H è il punto medio di CC'.



La distanza tra i due piani corrisponde all'altezza relativa all'ipotenusa nel triangolo rettangolo KHD', la cui misura è $\frac{KD' \cdot KH}{HD'} = \frac{(1/2) \cdot 1}{\sqrt{5}/2} = 1/\sqrt{5}$.

(11) Risposta corretta: C. Il diametro passante per P è diviso da P in due corde di lunghezza 6 e 24, il cui prodotto è 144. Ogni altra corda per P viene divisa in due segmenti il cui prodotto è 144 (teorema delle corde). Affinché le lunghezze siano intere, si tratta di considerare i divisori di 144 compresi tra 6 e 24, vale a dire: 8, 9, 12, 16, 18, che sono le possibili lunghezze delle parti di corda giacenti in uno dei due semipiani (rispetto al diametro per P). Va poi aggiunto il diametro stesso. In tutto ci sono 6 possibilità.

(12) Risposta corretta: D. Intanto scriviamo il numero $x = 0,\overline{15}$ sotto forma di frazione. Dato che $100x = 15,\overline{15}$, si ha $100x - x = 15,\overline{15} - 0,\overline{15}$, ossia $99x = 15$, da cui $x = \frac{15}{99} = \frac{5}{33}$. Perciò, indicando le età di Paolo e della nonna Giuditta con P e G, si ha $33P = 5G$. Quindi P è multiplo di 5. Per $P = 5$, avremmo $G = 33$: Lucia sarebbe nata quando sua nonna aveva 18 anni: decisamente troppo pochi! Non può essere $P \geqslant 15$, giacché Paolo è il fratello minore di Lucia. L'unica possibilità che resta è $P = 10$, nel qual caso $G = 66$.

(13) Risposta corretta: D. La prima è falsa. Infatti la disuguaglianza $(x+y)^2 < K\,xy$ equivale a $\frac{x^2+2xy+y^2}{xy} < K$, cioè $2 + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} < K$. Basta fissare una delle due variabili x, y e far crescere l'altra arbitrariamente per rendersi conto che non esiste alcuna costante K siffatta.
La seconda è vera. Essa equivale a $\frac{1}{y} + \frac{1}{x} < K$ che, ad esempio, è soddisfatta da $K = 25$ per $x, y > \frac{1}{10}$.
Anche la terza è vera: per quanto visto sopra, basta prendere, ad esempio, $K = 2$.

(14) Risposta corretta: E. Per il teorema di Ruffini, abbiamo che $p(x) = (x-u)(x-v)(x-w)$, ossia $x^3 - 6x + 1 = x^3 - (u+v+w)\,x^2 + (uv+vw+wu)\,x - uvw$. Pertanto, uguagliando i coefficienti:

$$\begin{cases} u+v+w = 0 \\ uv+vw+wu = -6 \\ uvw = -1. \end{cases}$$

Ragionando nello stesso modo, abbiamo che $q(x) = (x-u^2)(x-v^2)(x-w^2)$, vale a dire $x^3 + ax^2 + bx + c = x^3 - (u^2+v^2+w^2)\,x^2 + (u^2v^2+v^2w^2+w^2u^2)\,x - u^2v^2w^2$, e pertanto

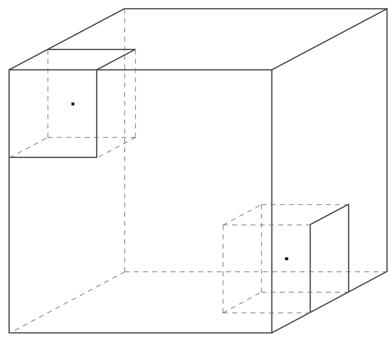
$$\begin{cases} u^2+v^2+w^2 = -a \\ (uv)^2+(vw)^2+(wu)^2 = b \\ (uvw)^2 = -c. \end{cases}$$

Così, con alcune sostituzioni successive, possiamo ricavare i valori $a = -12$, $b = 36$, $c = -1$. Una soluzione più rapida si ottiene osservando che

$$\begin{aligned} q(1) &= 1+a+b+c \\ &= (1-u^2)(1-v^2)(1-w^2) \\ &= (1-u)(1-v)(1-w)\cdot(1+u)(1+v)(1+w) \\ &= p(1)\cdot(-p(-1)) = -4\cdot(-6) = 24. \end{aligned}$$

Da ciò si conclude che $a+b+c = 24-1 = 23$.

(15) Risposta corretta: D. Per le coppie di centri a distanza 3, il quadrato di tale distanza è 9. Introduciamo un sistema di riferimento con gli assi paralleli agli spigoli. Per una coppia a distanza 3, si ha una soluzione intera dell'equazione $(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 = 9$ dove Δx, Δy, Δz sono le differenze tra le coordinate dei centri dei cubetti: perciò dobbiamo avere $|\Delta x|, |\Delta y|, |\Delta z| \leqslant 2$. A meno del segno e dell'ordine, l'unica soluzione è $(2,2,1)$, che corrisponde a una coppia di cubetti di cui uno è in un vertice e l'altro è al centro di uno dei 3 spigoli adiacenti al vertice opposto.



Per ogni vertice del cubo, ci sono quindi 3 coppie a distanza 3: in tutto sono dunque $8\cdot 3 = 24$ (nessuna coppia è stata contata più volte).

(16) Risposta corretta: A. Se all'inizio vi sono 0, oppure 1, 2, 3 monete, vince in maniera ovvia il secondo giocatore. Pertanto, anche se vi sono 11, oppure 12, 13, 14 monete, vince il secondo giocatore: basterà che, dopo la mossa del primo, il secondo faccia la mossa "opposta", in modo da togliere in tutto 11 monete. Ripetendo questo schema, si trova allora che, se le monete iniziali m rispettano la condizione $11k \leqslant m \leqslant 11k+3$, il secondo giocatore ha una strategia vincente. Se m non rientra in uno di questi intervalli, sarà il primo giocatore a vincere: infatti, con la sua prima mossa potrà sempre lasciare all'avversario un numero di monete compreso in uno degli intervalli "perdenti". Dal momento che $55 = 11\cdot 5$, $69 = 11\cdot 6+3$, $76 = 11\cdot 6+10$, a vincere saranno, nell'ordine, Barbara, Barbara, Alice.