

Roma, 30 marzo 2007

PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA – SEZIONE DI ROMA

GARA INDIVIDUALE

Dipartimenti di Matematica delle Università
Sapienza, Tor Vergata, Roma Tre

con il sostegno di:

Unione Matematica Italiana, Istituto Nazionale di Alta Matematica,
Progetto Lauree Scientifiche, CARFID

tempo a disposizione: 1 ora e 20 minuti

Quesito 1. Disponiamo del compasso, ma non della riga.

- (a) Dati due punti A e B , come possiamo individuare il simmetrico di B rispetto ad A ?
- (b) Data una retta r e un punto C esterno ad essa, come possiamo individuare un punto D , diverso da C , tale che la retta CD sia parallela ad r ?

Quesito 2. Consideriamo l'equazione

$$\frac{mn}{m+3n} = 24,$$

dove m e n sono interi relativi.

Quante sono le coppie (m, n) che la soddisfano?

Quesito 3. In un cerchio di centro O e raggio 1 si prolunga un diametro AB di un segmento BC , e da C si traccia una tangente CT al cerchio (T è il punto di tangenza). Sapendo che il triangolo ACT così ottenuto è isoscele,

- (a) dimostrare che OBT è un triangolo equilatero;
- (b) determinare la lunghezza del segmento BC .

Quesito 4. Si consideri la trasformazione T del piano che manda il generico punto di coordinate (x, y) nel punto di coordinate $(2x + y, 2y)$. In formule

$$T(x, y) = (2x + y, 2y).$$

Applichiamo 64 volte di seguito la trasformazione T a partire dal punto $(2, -\frac{1}{16})$.

Determinare le coordinate (x', y') del punto così ottenuto.