PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA - SEZIONE DI ROMA

GARA A SQUADRE

Dipartimenti di Matematica delle Università Sapienza, Tor Vergata e Roma Tre

Con il sostegno di:
Unione Matematica Italiana, Istituto Nazionale di Alta Matematica,
Progetto Lauree Scientifiche, CARFID

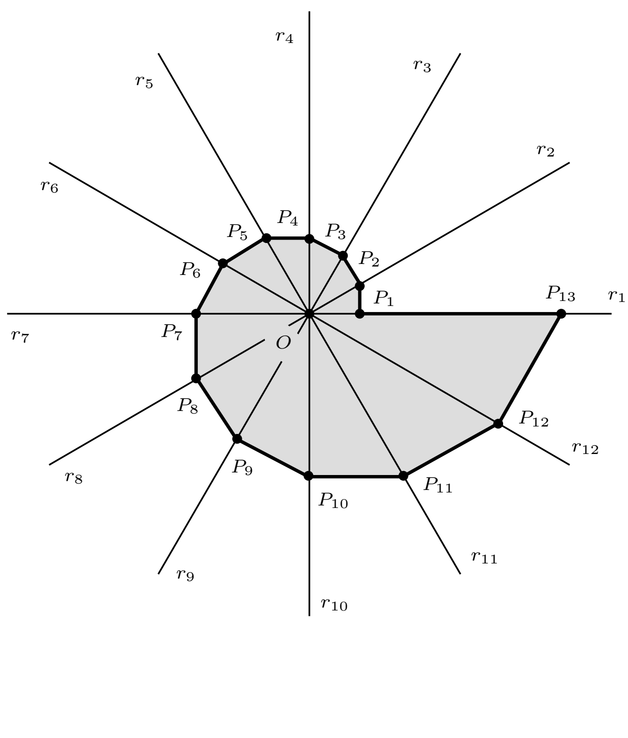
23 marzo 2007

1. Laura, appassionata del gioco del lotto, ha giocato una cinquina sulla ruota di Roma, ma ha perso la ricevuta e si è dimenticata i cinque numeri (che sono, ovviamente, distinti). Ricorda solo che la loro somma faceva 17. Quale tra questi numeri è stato sicuramente giocato da Laura?

(A) 3
(B) 4
(C) 5
(D) 6
(E) 7

2. Costruiamo l'*ammonite a* 12 *spicchi* nel modo seguente. A partire da un punto O del piano, tracciamo 12 semirette che dividono l'angolo giro in parti uguali. Indichiamo le 12 semirette con r_1, r_2, ..., r_{12}. Sia P_1 il punto di r_1 a distanza 1 da O. Da qui tracciamo il segmento P_1P_2, perpendicolare ad r_1, con P_2 su r_2. Da P_2 tracciamo quindi il segmento P_2P_3, perpendicolare ad r_2, con P_3 su r_3, e così via, fino a tracciare $P_{12}P_{13}$, perpendicolare ad r_{12}, con P_{12} su r_{12} e P_{13} su r_1. L'ammonite è il poligono racchiuso dalla spezzata $P_1P_2 \dots P_{13}P_1$. Qual è la sua area?

(A) $\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}\left[\left(\dfrac{4}{3}\right)^6 - 1\right]$
(B) $4(\sqrt{3}-1)$
(C) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left[1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^{12}\right]$
(D) $4(3-\sqrt{3})$
(E) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left[\left(\dfrac{4}{3}\right)^{12} - 1\right]$



3. Su una lavagna sono scritti tre numeri naturali consecutivi. Sotto al primo numero riscriviamo il numero stesso invariato. Sotto al secondo numero scriviamo la sua somma con 10. Sotto al terzo numero scriviamo la sua somma con un numero primo p. I tre numeri così ottenuti, in quest'ordine, sono in progressione geometrica: vale a dire che il rapporto del terzo con il secondo è uguale al rapporto del secondo con il primo. Quanto vale il numero primo p?

(A) $p = 11$
(B) $p = 17$
(C) $p = 23$
(D) $p = 31$
(E) $p = 37$

4. Dato un triangolo ABC, diremo che un punto P al suo interno è un *areocentro* di ABC se le aree dei triangoli ABP, BCP e CAP sono uguali. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(A) Ogni triangolo possiede infiniti areocentri
(B) I triangoli scaleni hanno infiniti areocentri, i triangoli isosceli ne hanno solo uno
(C) I triangoli isosceli hanno un unico areocentro, i triangoli scaleni non ne hanno nessuno
(D) Ogni triangolo ha un unico areocentro, che coincide con il suo incentro (centro della circonferenza inscritta nel triangolo)
(E) Ogni triangolo ha un unico areocentro, che coincide con il suo baricentro (punto di intersezione delle tre mediane)

5. Si consideri la successione A_n di numeri interi definita da $A_n = 4n^3 - 6n^2 + 4n - 1$. Ad esempio $A_2 = 4 \cdot 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 - 1 = 15$. Quanto vale la somma $A_2 + A_3 + \cdots + A_{100}$?

(A) 2007
(B) 3940399
(C) 99999999
(D) 100000001
(E) 100000007

6. Cinque persone, H, K, L, M ed N, sono sospettate di un delitto. Questo potrebbe essere stato commesso da uno o più di loro; ma il colpevole, o i colpevoli, sono comunque compresi tra i cinque sospettati. La polizia ha accertato che:

- se H è colpevole, allora ha avuto esattamente un complice,
- se K è colpevole, allora ha avuto almeno un complice,
- se L è colpevole, allora ha avuto al più un complice,
- se M è colpevole, allora ha avuto almeno due complici,
- se N è colpevole, allora ha avuto esattamente due complici.

Con le indagini si scopre che K è innocente. Possiamo concludere che

(A) sicuramente H è colpevole
(B) sicuramente L è colpevole
(C) sicuramente M è colpevole
(D) ci sono esattamente due colpevoli
(E) non si può stabilire né il numero dei colpevoli, né la colpevolezza di qualcuno

7. Qual è il più piccolo numero naturale che possiede esattamente 20 divisori (positivi), contando anche 1 e il numero stesso?

(A) $2^9 \cdot 3$
(B) 2^{19}
(C) 2^{20}
(D) 240
(E) nessuno dei precedenti

8. Abbiamo a disposizione un foglio di carta quadrato da $1\,\mathrm{m} \times 1\,\mathrm{m}$. Qual è il più grande cubo tra i seguenti che è possibile impacchettare con esso, senza tagliare il foglio?

(A) un cubo di spigolo $1/4\,\mathrm{m}$
(B) un cubo di spigolo $\sqrt{2}/4\,\mathrm{m}$
(C) un cubo di spigolo $1/3\,\mathrm{m}$
(D) un cubo di spigolo $1/(\sqrt{6}-1)\,\mathrm{m}$
(E) un cubo di spigolo $4/9\,\mathrm{m}$

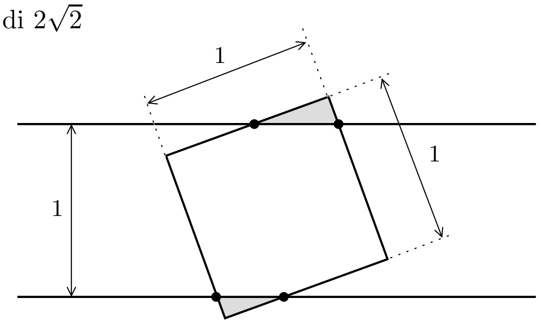
9. Mario ha due monete ben equilibrate, nel senso che, lanciandole, esce testa o croce con la stessa probabilità. Anna ha invece due monete uguali, ma sbilanciate: la probabilità di fare testa è minore della probabilità di fare croce. Se entrambi lanciano le due monete, allora

(A) per entrambi la probabilità di avere due facce uguali è $1/2$
(B) la probabilità che Mario ottenga due facce uguali è $1/4$, mentre la probabilità che Anna ottenga due facce uguali è minore di $1/4$
(C) la probabilità che Mario ottenga due facce uguali è $1/2$, mentre la probabilità che Anna ottenga due facce uguali è minore di $1/2$
(D) per entrambi la probabilità di avere due facce uguali è $1/4$
(E) la probabilità che Mario ottenga due facce uguali è $1/2$, mentre la probabilità che Anna ottenga due facce uguali è maggiore di $1/2$

10. Data una striscia di piano delimitata da due rette parallele a distanza 1, si consideri un quadrato Q di lato 1, il cui bordo intersechi le due rette in 4 punti distinti (come in figura). Consideriamo le parti del quadrato non comprese all'interno della striscia.

Cosa si può dire della somma dei perimetri di tali regioni?

(A) varia da un minimo di $2\sqrt{2}-1$ a un massimo di $1+\sqrt{2}$
(B) varia da un minimo di $\sqrt{2}$ a un massimo di $2\sqrt{2}$
(C) è sempre $1+\sqrt{2}$
(D) è sempre 2
(E) è sempre $2\sqrt{2}-1$



11. Sia f una funzione che a ciascun numero intero relativo associa un numero intero relativo. Sappiamo che la funzione f ha queste proprietà:

$f(-n) = -f(n)$,
$f(1-n) = 1-f(n)$

per ogni intero n. Quanto vale $f(2007)$?

(A) 0
(B) 1
(C) 2007
(D) -4014
(E) non è possibile stabilirlo (ci sono varie funzioni con quelle caratteristiche)

12. Dato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, sia α la simmetria rispetto all'asse x e sia β la simmetria rispetto alla bisettrice del 1° e 3° quadrante. A partire da un punto P, si applica prima la simmetria α, ottenendo così un punto P', poi si applica β a P', quindi ancora α al punto ottenuto, poi β, e così via alternando α e β.

Dopo quanti passi vi è la certezza che, qualunque sia P, il punto tornerà alla posizione iniziale?

(A) dopo 4 passi (cioè applicando nell'ordine α, β, α, β)
(B) dopo 5 passi (cioè applicando nell'ordine α, β, α, β, α)
(C) dopo 6 passi (cioè applicando nell'ordine α, β, α, β, α, β)
(D) dopo 8 passi (cioè applicando nell'ordine α, β, α, β, α, β, α, β)
(E) salvo casi particolari, P non tornerà mai più nella posizione iniziale

13. Antonia, innamorata di Fabio, ha questo passatempo: scrive in ordine alfabetico tutte le parole di 5 lettere che si possono formare usando le lettere F, A, B, I ed O. La prima parola della lista sarà AAAAA, poi AAAAB, e così via. I fogli a sua disposizione le basteranno però solo per scrivere 2007 parole. Quale sarà l'ultima lettera scritta da Antonia?

(A) una F
(B) una A
(C) una B
(D) una I
(E) una O

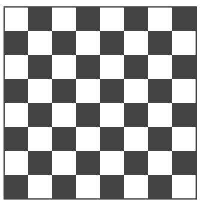
14. Si consideri l'insieme di tutte le terne ordinate (x, y, z) formate dai soli numeri 0, 1 e 2 (ad esempio $(0, 0, 0)$, $(1, 2, 1)$, $(2, 1, 1)$). Chiamiamo due terne *confinanti* se soltanto in una posizione su tre esse contengono elementi diversi, e la differenza tra tali elementi è $+1$ o -1. Ad esempio, le terne $(2, 2, 2)$ e $(2, 1, 2)$ sono confinanti, come anche $(1, 0, 1)$ e $(1, 0, 2)$. Vogliamo assegnare un colore a ciascuna terna, in modo che due terne confinanti non abbiano mai lo stesso colore. Qual è il minimo numero di colori necessari?

(A) 2
(B) 3
(C) 4
(D) 5
(E) 6

15. Tre corde parallele di una circonferenza hanno lunghezze 3, 4 e 5, mentre i corrispondenti angoli al centro hanno ampiezze (rispettivamente) γ, δ, $\gamma + \delta$. Il raggio della circonferenza è

(A) $5/2$
(B) $2\sqrt{2}$
(C) 3
(D) $2\sqrt{3}$
(E) 4

16. In una scacchiera 8×8, quanti sono i quadrati (formati da caselle confinanti della scacchiera) che contengono un numero dispari di caselle nere?



(A) 42
(B) 60
(C) 84
(D) 102
(E) 120