

Roma, 30 marzo 2007

PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA – SEZIONE DI ROMA

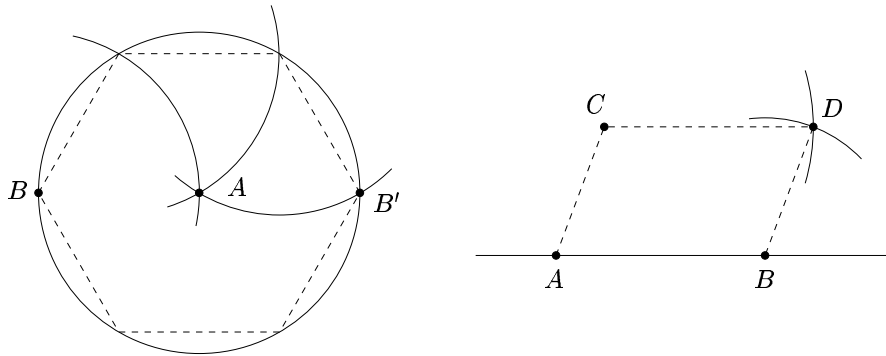
SOLUZIONI DELLA GARA INDIVIDUALE

Dipartimenti di Matematica delle Università  
Sapienza, Tor Vergata, Roma Tre

con il sostegno di:

Unione Matematica Italiana, Istituto Nazionale di Alta Matematica,  
Progetto Lauree Scientifiche, CARFID

**Quesito 1. (a)** Tracciamo la circonferenza di centro  $A$  passante per  $B$ . Poi, partendo da  $B$  e con la stessa apertura, riportiamo tre volte il segmento  $AB$  sulla circonferenza, come indicato nella figura a sinistra. Otteniamo così il punto  $B'$ , simmetrico di  $B$  rispetto ad  $A$ . Infatti  $B$  e  $B'$  sono vertici opposti di un esagono inscritto nella circonferenza.



**(b)** Scegliamo due punti distinti qualsiasi  $A$  e  $B$  sulla retta  $r$ . Tracciamo la circonferenza di centro  $C$  e raggio  $AB$ , e quella di centro  $B$  e raggio  $AC$  (figura a destra). Le due circonferenze si incontrano in due punti. Quello, tra i due, che si trova dalla parte opposta di  $A$ , rispetto a  $BC$ , è il punto  $D$  richiesto. Infatti  $ABDC$  è un parallelogramma.

**Quesito 2.** Riscriviamo l'equazione nella forma  $mn - 24m - 3 \cdot 24n = 0$ , ovvero

$$(m - 3 \cdot 24)(n - 24) = 3 \cdot 24^2.$$

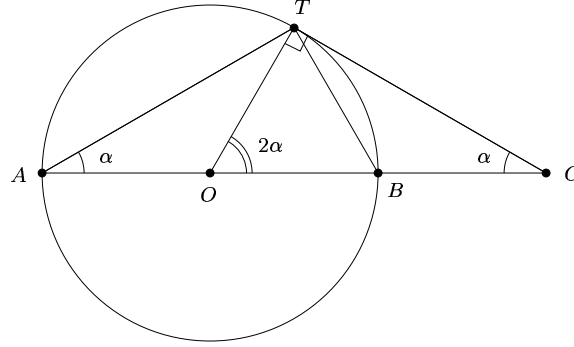
Si ha una soluzione intera di questa equazione per ogni possibile scelta del fattore  $n - 24$  tra i divisori (positivi o negativi) di  $3 \cdot 24^2$ . Scomponendo in fattori primi, si ha

$$24 = 2^3 \cdot 3, \quad \text{dunque} \quad 3 \cdot 24^2 = 2^6 \cdot 3^3.$$

I divisori positivi di  $3 \cdot 24^2$  sono i numeri del tipo  $2^a \cdot 3^b$ , con  $0 \leq a \leq 6$  e  $0 \leq b \leq 3$ . Di questi ce ne sono  $7 \cdot 4 = 28$ . Includendo anche i loro opposti,  $3 \cdot 24^2$  ha in tutto 56 divisori. Dalle soluzioni così trovate va però esclusa la coppia  $m - 3 \cdot 24 = -3 \cdot 24$ ,  $n - 24 = -24$ , corrispondente ad avere  $m = n = 0$ , che non è accettabile per come l'equazione era inizialmente formulata. In conclusione, si hanno complessivamente 55 soluzioni.

**Quesito 3. (a)** In primo luogo, si osservi che  $AC$  è il lato maggiore del triangolo  $ACT$ , dunque  $AT = TC$ . L'angolo  $TOC$  è il doppio dell'angolo in  $A$  (sono, rispettivamente, angolo al centro e angolo alla circonferenza corrispondenti all'arco  $TB$ ) ed è il complementare dell'angolo in  $C$  (il raggio  $OT$  è perpendicolare alla tangente). In sostanza,  $TOC$  è un angolo uguale al doppio del suo complementare: quindi, la sua ampiezza è  $60^\circ$ . Inoltre  $TOC$  è un triangolo isoscele, avendo due lati uguali al raggio. Quindi il triangolo  $OTB$  è equilatero.

**(b)** I triangoli  $AOT$  e  $TBC$  sono uguali, avendo due angoli uguali e i due lati  $AT$  e  $TC$  uguali. Allora, in particolare, il lato  $BC$  è uguale al lato corrispondente  $AO$ , cioè al raggio della circonferenza. Dunque si ha  $\overline{BC} = 1$ .



Un metodo alternativo consiste nell'osservare che i triangoli  $ATB$  e  $OTC$  sono uguali, in quanto entrambi rettangoli, con un lato uguale e un angolo uguale. A partire da questo fatto si possono facilmente trarre le stesse conclusioni.

**Quesito 4.** Indichiamo con  $T^{(n)}(x, y)$  il punto ottenuto applicando  $n$  volte la trasformazione  $T$  a partire dal punto  $(x, y)$ . Facciamo vedere che, per ogni intero  $n \geq 1$ , si ha

$$T^{(n)}(x, y) = (2^n x + n 2^{n-1} y, 2^n y).$$

Procediamo per induzione su  $n$ . Nel caso  $n = 1$  la formula è evidentemente valida.

Supponiamo ora che la formula valga nel caso  $n = k$  e mostriamo che vale anche nel caso  $n = k + 1$ . Dobbiamo cioè mostrare che  $T^{(k+1)}(x, y) = (2^{k+1}x + (k+1)2^k y, 2^{k+1}y)$ , assumendo che  $T^{(k)}(x, y) = (2^k x + k 2^{k-1} y, 2^k y)$  (ipotesi induttiva). Per definizione, si ha

$$T^{(k+1)}(x, y) = T(T^{(k)}(x, y)).$$

Allora, in base all'ipotesi induttiva, si ha

$$\begin{aligned} T^{(k+1)}(x, y) &= T(T^{(k)}(x, y)) = T(2^k x + k 2^{k-1} y, 2^k y) \\ &= (2 \cdot (2^k x + k 2^{k-1} y) + 2^k y, 2 \cdot 2^k y) = (2^{k+1}x + (k+1)2^k y, 2^{k+1}y), \end{aligned}$$

che è ciò che volevamo dimostrare.

Per  $n = 64$  e  $(x, y) = (2, -\frac{1}{16})$  si trova

$$T^{(64)}\left(2, -\frac{1}{16}\right) = \left(2^{64} \cdot 2 + 64 \cdot 2^{63} \cdot \left(-\frac{1}{16}\right), 2^{64} \cdot \left(-\frac{1}{16}\right)\right) = (2^{65} - 2^{65}, -2^{60}) = (0, -2^{60}).$$