PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA - SEZIONE DI ROMA

SOLUZIONI DELLA GARA A SQUADRE

Dipartimenti di Matematica delle Università Sapienza, Tor Vergata e Roma Tre

Con il sostegno di:
Unione Matematica Italiana, Istituto Nazionale di Alta Matematica,
Progetto Lauree Scientifiche, CARFID

23 marzo 2007

1. La risposta corretta è **(A)**. Se Laura non avesse giocato il 3, la somma dei 5 numeri sarebbe, come minimo, $1+2+4+5+6=18$. Quindi il 3 è stato giocato. La cinquina di Laura potrebbe essere $(1,2,3,4,7)$, oppure $(1,2,3,5,6)$. Segue che nessuno dei numeri 4, 5, 6 e 7 è stato giocato con certezza: per ciascuno di essi c'è una cinquina con somma 17 che non lo comprende.

2. La risposta corretta è **(E)**. L'area dell'ammonite è la somma delle aree dei dodici triangoli rettangoli OP_1P_2, OP_2P_3, ..., $OP_{12}P_{13}$. I 12 angoli formati dalle semirette hanno ampiezza 30°, dunque ciascuno dei triangoli rettangoli OP_kP_{k+1} è la metà di un triangolo equilatero. Quindi $\overline{OP_2}=2\overline{P_1P_2}$. Per il teorema di Pitagora, $\overline{OP_1}^2+\overline{P_1P_2}^2=\overline{OP_2}^2=4\overline{P_1P_2}^2$, ovvero $3\overline{P_1P_2}=\overline{OP_1}$, da cui $\overline{P_1P_2}=1/\sqrt{3}$ e $\overline{OP_2}=2/\sqrt{3}$. L'area del triangolo OP_1P_2 è dunque

$$\frac{\overline{OP_1}\cdot\overline{P_1P_2}}{2}=\frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

Passiamo al triangolo OP_2P_3, che è simile ad OP_1P_2. Il cateto OP_2 è $2/\sqrt{3}$ volte il cateto omologo OP_1, e lo stesso rapporto ci sarà tra i cateti P_2P_3 e P_1P_2. Pertanto l'area di OP_2P_3 è $(2/\sqrt{3})^2=4/3$ volte l'area di OP_1P_2. Proseguendo, l'area di OP_3P_4 è $4/3$ l'area di OP_2P_3, e così via.

Le aree dei triangoli sono quindi in progressione geometrica:

$$\frac{1}{2\sqrt{3}},\quad \frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{4}{3},\quad \frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^2,\quad \text{fino a}\quad \frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{11}.$$

Per sommare i termini di una progressione geometrica, ricordiamo l'uguaglianza

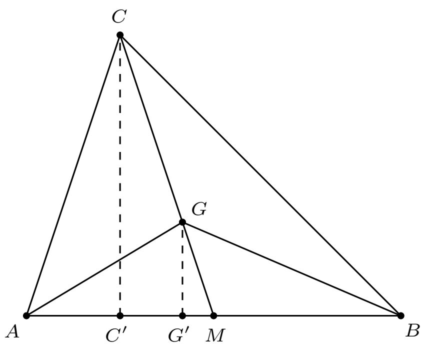
$$1+q+q^2+\ldots+q^{n-1}=\frac{q^n-1}{q-1}.$$

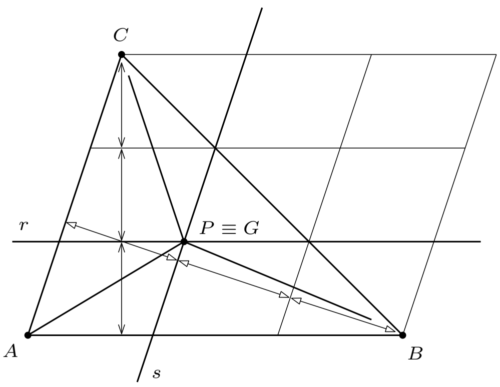
In conclusione, l'area dell'ammonite vale

$$\frac{1}{2\sqrt{3}}\left[1+\frac{4}{3}+\left(\frac{4}{3}\right)^2+\ldots+\left(\frac{4}{3}\right)^{11}\right]=\frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{(4/3)^{12}-1}{4/3-1}=\frac{\sqrt{3}}{2}\left[\left(\frac{4}{3}\right)^{12}-1\right].$$

3. La risposta corretta è **(D)**. Siano n, $n+1$, $n+2$ i tre numeri consecutivi. Dopo aver aggiunto 10 al secondo e p al terzo otteniamo n, $n+11$, $n+p+2$. La condizione che essi, nell'ordine dato, siano in progressione geometrica si traduce nel fatto che $(n+11)^2=n(n+p+2)$, ovvero $n(p-20)=121$. Dunque n deve dividere 121, e può quindi essere 1, 11 o 121. I casi $n=1$ ed $n=121$ sono esclusi, perché si otterrebbero, rispettivamente, i valori $p=141$ e $p=21$, che non sono primi. Se $n=11$ si ottiene $p=31$ che è primo. Ricapitolando, si ha $n=11$ e $p=31$. La terna di numeri iniziali è $(11,12,13)$, mentre la nuova terna è $(11,22,44)$, e si ha $44/22=22/11$.

4. La risposta corretta è **(E)**. Vediamo intanto che il baricentro G di un triangolo ABC è sempre un suo areocentro. Detto M il punto medio di AB, risulta $\overline{GM} = \overline{CM}/3$. Se C' e G' sono le proiezioni di C e G, rispettivamente, sulla retta AB, i triangoli MCC' e MGG' sono simili, dunque in particolare $\overline{GG'} = \overline{CC'}/3$ (si veda la figura a sinistra). Poiché i triangoli ABC ad ABG hanno AB come base comune e CC' e GG', rispettivamente, come altezze, si ha che l'area di ABG è un terzo dell'area di ABC. Lo stesso vale per i triangoli BCG e CAG.





Mostriamo ora che il baricentro è in effetti l'unico areocentro di ABC. Indichiamo con h_A, h_B ed h_C le misure delle altezze di ABC uscenti da A, B e C, rispettivamente. Detto P un areocentro di ABC, si ha che l'area di ABP deve essere un terzo dell'area di ABC. Dunque P deve trovarsi sulla retta r, parallela alla retta AB, a distanza $h_C/3$ da questa e disposta nel semipiano dove si trova C. Osserviamo che tale retta r contiene anche il baricentro G. Analogamente P dovrà trovarsi sulla retta s, parallela alla retta AC, a distanza $h_B/3$ da questa e disposta nel semipiano dove si trova B. Anche s contiene G. Dunque P e G appartengono entrambi alle due rette r ed s. Ma r ed s, non essendo parallele, si intersecano in un solo punto e dunque P coincide con G.

5. La risposta corretta è **(C)**. Notiamo che $A_n = 4n^3 - 6n^2 + 4n - 1 = n^4 - (n-1)^4$. Pertanto

$$A_2 + A_3 + A_4 + \cdots + A_{100} = (2^4 - 1^4) + (3^4 - 2^4) + (4^4 - 3^4) + \cdots + (100^4 - 99^4).$$

In questa somma i termini 2^4, 3^4, $\ldots$, fino a 99^4, si cancellano tutti. Dunque

$$A_2 + A_3 + A_4 + \cdots + A_{100} = 100^4 - 1^4 = 99999999.$$

6. La risposta corretta è **(B)**. Visto che K è innocente, gli indiziati sono solo quattro: H, L, M ed N. Se fosse colpevole uno degli ultimi due, ci sarebbero, in tutto, tre o più colpevoli. Fra questi, tuttavia, non può esserci né H né L (ciascuno di loro, se colpevole, ha avuto al massimo un complice). Pertanto, anche M ed N sono innocenti. Di conseguenza, almeno uno tra H ed L è colpevole. Ma se H è colpevole ha avuto un complice, il quale non può essere che L. In conclusione: L è sicuramente colpevole, anche se non sappiamo se ha agito da solo o con la complicità di H.

7. La risposta corretta è **(D)**. Se decomponiamo un numero naturale n in fattori primi:

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k},$$

il numero di divisori di n è dato dal prodotto $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_k + 1)$. Infatti un divisore di n non può possedere alcun fattore primo all'infuori di quelli di n, e ciascuno di essi può comparire con un esponente da 0 fino all'esponente con cui compare in n. Quindi scegliere un divisore del numero n equivale a scegliere i k esponenti dei divisori primi di n: per l'esponente di p_1 abbiamo $\alpha_1 + 1$ possibilità (da 0 ad α_1), per l'esponente di p_2 abbiamo $\alpha_2 + 1$ possibilità (da 0 ad α_2), e così via. Ad esempio, scegliendo sempre l'esponente 0 si trova il divisore 1, mentre scegliendo sempre l'esponente α_j si ottiene il divisore n.

Allora, per trovare un numero con 20 divisori, occorre intanto elencare tutte le decomposizioni di 20 come prodotto di interi positivi (maggiori di 1). Queste sono quattro:

$$20 = 2 \cdot 2 \cdot 5, \quad 20 = 2 \cdot 10, \quad 20 = 4 \cdot 5, \quad 20 = 20.$$

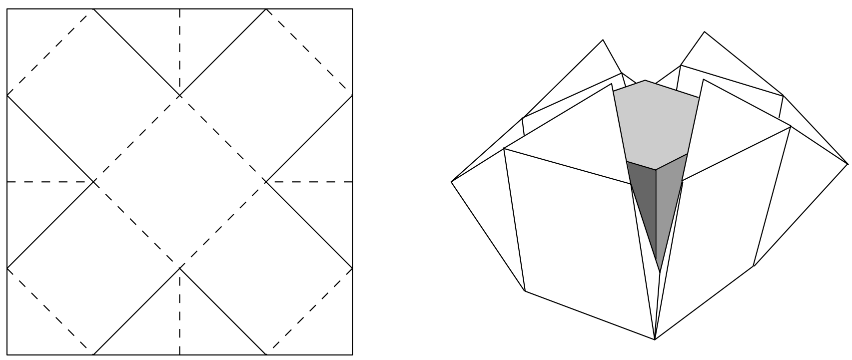
In corrispondenza, si hanno le seguenti decomposizioni di n in fattori primi:

$$n = p \cdot q \cdot r^4, \quad n = p \cdot q^9, \quad n = p^3 \cdot q^4, \quad n = p^{19},$$

dove p, q ed r sono primi distinti. Il numero n più piccolo tra quelli così ottenibili è

$$n = 3 \cdot 5 \cdot 2^4 = 240.$$

8. La risposta corretta è **(B)**. Inanzitutto facciamo vedere che un cubo di spigolo $\sqrt{2}/4\,\mathrm{m}$ può essere impacchettato. Se nel foglio si effettuano le piegature indicate nella figura a sinistra (le linee continue in un verso, le linee tratteggiate nell'altro), si può impacchettare il cubo come suggerito nella figura a destra. Il lato del foglio di carta è quattro volte il lato di un quadrato la cui diagonale coincide con lo spigolo del cubo. Dunque tale spigolo vale $\sqrt{2}/4\,\mathrm{m}$.



Le risposte **(A)** e **(C)** sono escluse, in quanto $1/4$ e $1/3$ sono entrambi più piccoli di $\sqrt{2}/4$. La prima disuguaglianza è evidente; la seconda, se si vogliono evitare calcoli con cifre decimali, può ad esempio essere verificata come segue: $1/3 < \sqrt{2}/4 \Leftrightarrow 1/9 < 2/16 \Leftrightarrow 16 < 18$.

La risposta **(E)** è da escludere, in quanto l'area della superficie totale di un cubo di spigolo $4/9$ è $6 \cdot (4/9)^2 > 1$: non abbiamo abbastanza carta. Per lo stesso motivo va scartata la risposta (**D**).

9. La risposta corretta è **(E)**. La probabilità che Mario ottenga due facce uguali è $1/2$: ci sono 4 casi equiprobabili (TT, TC, CT e CC) di cui 2 favorevoli (TT e CC). Nel caso di Anna, invece, i quattro casi non sono equiprobabili. Infatti, per le monete di Anna, le probabilità che escano testa o croce valgono, rispettivamente, $1/2 - a$ e $1/2 + a$, con $0 < a < 1/2$. Allora la probabilità che escano due teste è $(1/2 - a)^2 = 1/4 - a + a^2$, mentre la probabilità che escano due croci è $(1/2 + a)^2 = 1/4 + a + a^2$. La probabilità di ottenere due facce uguali è dunque

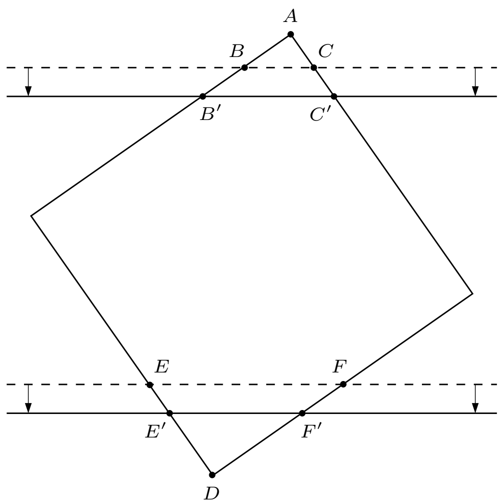
$$\left(\frac{1}{2} - a\right)^2 + \left(\frac{1}{2} + a\right)^2 = \frac{1}{2} + 2a^2,$$

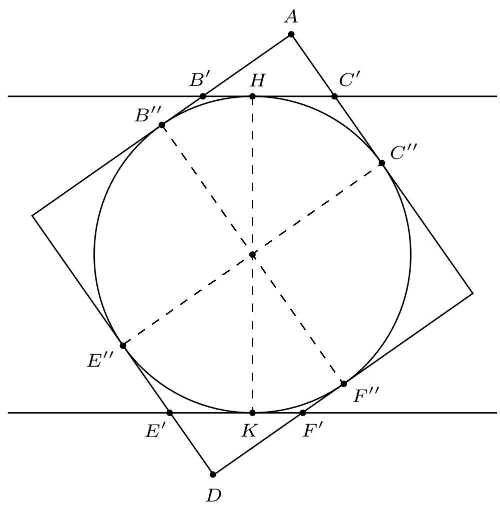
che è evidentemente maggiore di $1/2$. Si noti che la risposta sarebbe stata la stessa se per le monete di Anna la probabilità di ottenere testa fosse stata maggiore della probabilità di ottenere croce, ovvero se $-1/2 < a < 0$.

10. La risposta corretta è **(D)**. Per prima cosa osserviamo che i quattro punti di intersezione del quadrato con le due rette devono necessariamente appartenere ciascuno ad un lato diverso del quadrato. Verifichiamo ora che, passando da una configurazione ad un altra attraverso una traslazione delle due rette nella direzione ad esse perpendicolare, mantenendole a distanza 1, la somma dei perimetri dei triangoli fuori dalla striscia non varia (si veda la figura a sinistra, in cui la traslazione delle rette avviene verso il basso).

Nella configurazione iniziale restano fuori dalla striscia i triangoli ABC e DEF, mentre nella configurazione finale restano fuori i triangoli $AB'C'$ e $DE'F'$. I triangoli ABC e DEF sono simili, dunque la somma dei loro perimetri sarà uguale al perimetro di un triangolo simile ad essi e avente come altezza la somma delle loro altezze (uscenti da A e da D). Analogamente, anche i triangoli $AB'C'$ e $DE'F'$ sono simili, e la somma dei loro perimetri sarà uguale al perimetro di un triangolo simile ad essi e avente come altezza la somma delle loro altezze (uscenti da A e da D).

Dato che i triangoli ABC, DEF, $AB'C'$ e $DE'F'$ sono in realtà tutti simili, e dato che, con la traslazione, la somma delle altezze uscenti da A e da D rimane la stessa, otteniamo che anche la somma dei perimetri dei due triangoli rimane la stessa.





Possiamo quindi, senza perdita di generalità, ridurre lo studio ad una configurazione particolare, precisamente quella in cui il centro del quadrato (centro della circonferenza inscritta), si trova alla stessa distanza dalle due rette (si veda la figura a destra). In questo caso le rette sono tangenti alla circonferenza inscritta nel quadrato, che ha raggio 1/2. Siano B'' e C'' i punti di contatto della circonferenza con il quadrato, sui lati contenenti B' e C', rispettivamente. Usando il fatto che i segmenti di tangenza ad una circonferenza condotti da un punto ad essa esterna sono tra loro uguali, si ha che il perimetro di $AB'C'$ è uguale alla somma dei segmenti AB'' e AC'', che vale 1. Analogamente, il perimetro di $DE'F'$ è uguale ad 1. Dunque la somma dei due perimetri vale 2.

11. La risposta corretta è **(C)**. Sostituendo $n = 0$ nella prima relazione, si ottiene $f(0) = -f(0)$, quindi $2f(0) = 0$, ovvero $f(0) = 0$. La seconda relazione equivale a $f(n) = 1-f(1-n)$, cioè, in base alla prima, $f(n) = 1+f(n-1)$. Dunque $f(1) = 1+f(0) = 1+0 = 1$, $f(2) = 1+f(1) = 1+1 = 2$, $f(3) = 1+f(2) = 1+2 = 3$, in generale $f(n) = 1+f(n-1) = 1+(n-1) = n$ per ogni $n \geqslant 0$. In particolare $f(2007) = 2007$. Osserviamo inoltre che, per la prima relazione, l'uguaglianza $f(n) = n$ vale anche per tutti gli interi negativi.

12. La risposta corretta è **(D)**. Dette (x, y) le coordinate di un generico punto Q, il simmetrico di Q rispetto all'asse x è il punto $(x, -y)$, mentre il simmetrico di Q rispetto alla bisettrice del 1° e 3° quadrante (retta di equazione $y = x$) è il punto (y, x). Dunque, applicando in modo alterno α e β a partire da $P = (x_0, y_0)$, si ottiene la sequenza di punti

$$(x_0, y_0) \xmapsto{\alpha} (x_0, -y_0) \xmapsto{\beta} (-y_0, x_0) \xmapsto{\alpha} (-y_0, -x_0) \xmapsto{\beta} (-x_0, -y_0)$$
$$\xmapsto{\alpha} (-x_0, y_0) \xmapsto{\beta} (y_0, -x_0) \xmapsto{\alpha} (y_0, x_0) \xmapsto{\beta} (x_0, y_0).$$

Dunque, in generale, dopo otto passi si ritrova P. Solo in alcuni casi particolari si ritrova il punto P prima dell'ottavo passo. Ad esempio, se il punto P si trova sulla bisettrice del 2° e del 4° quadrante (retta di equazione $y = -x$), dopo tre passi si ritrova P:

$$(x_0, -x_0) \xmapsto{\alpha} (x_0, x_0) \xmapsto{\beta} (x_0, x_0) \xmapsto{\alpha} (x_0, -x_0).$$

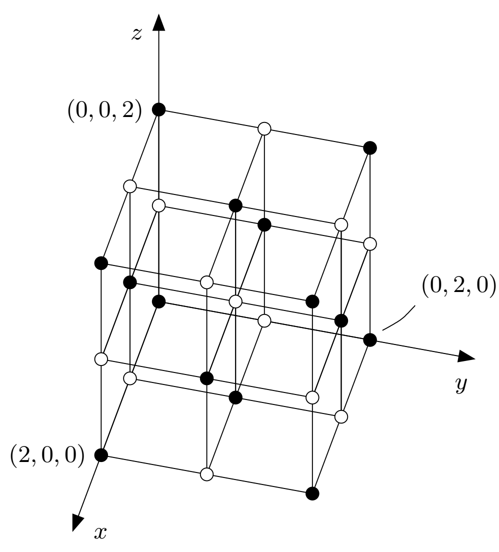
Si noti che la composizione di α con β è la rotazione di 90° in senso antiorario attorno all'origine.

13. La risposta corretta è **(C)**. Un modo rapido per risolvere l'esercizio consiste nell'interpretare le lettere usate da Antonia come delle cifre. Se facciamo corrispondere le cifre 0, 1, 2, 3 e 4 alle lettere A, B, F, I ed O, rispettivamente, abbiamo che la lista delle parole di cinque lettere ordinate alfabeticamente corrisponde all'elenco dei numeri di (al più) 5 cifre in un sistema di numerazione in base 5, ordinati in modo crescente.

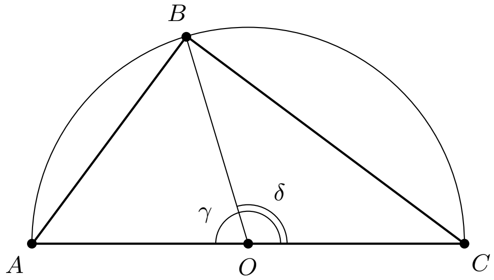
Antonia scrive in tutto 2007 parole. Poiché inizia con AAAAA, che corrisponde al numero 0, l'ultima parola scritta sarà quella che corrisponde al numero 2006. In base 5, la cifra delle unità di 2006 è 1, resto della divisione di 2006 per 5. Pertanto l'ultima lettera scritta da Antonia, che è l'ultima lettera dell'ultima parola, corrispondente alla cifra delle unità di 2006, è una B.

14. La risposta corretta è **(A)**. Evidentemente un colore non basta. D'altra parte possiamo colorare le terne con due colori: usiamo il primo colore per le terne (x, y, z) tali che $x + y + z$ è pari, e il secondo colore per le terne (x, y, z) tali che $x + y + z$ è dispari. Due terne confinanti hanno somme che differiscono di 1, quindi una ha somma pari e una ha somma dispari: saranno dunque colorate con colori diversi.

Possiamo visualizzare la relazione con un disegno tridimensionale, interpretando le terne come i punti a coordinate intere di un cubo avente un vertice nell'origine $(0, 0, 0)$ e i tre vertici ad esso adiacenti nei punti $(2, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ e $(0, 0, 2)$. La colorazione è rappresentata in figura.



15. La risposta corretta è **(A)**. Il fatto che le corde siano parallele è irrilevante. In realtà, conviene disporle in modo che gli angoli γ e δ siano consecutivi. In questo modo, se AB è la corda (di lunghezza 3) corrispondente a γ e BC è la corda (di lunghezza 4) corrispondente a δ, allora la corda AC corrisponde all'angolo al centro $\gamma + \delta$ e quindi, per ipotesi, ha lunghezza 5. Il triangolo ABC ha lati 3, 4 e 5 ed è inscritto nella circonferenza. Poiché tale triangolo è rettangolo, essendo $3^2 + 4^2 = 5^2$, la sua ipotenusa, di lunghezza 5, deve coincidere con il diametro della circonferenza.



16. La risposta corretta è **(B)**. Osserviamo che, in un quadrato di lato pari, c'è un numero pari sia di caselle nere che di caselle bianche. Infatti in ciascuna riga c'è sempre lo stesso numero di caselle bianche e nere, e sommando un numero pari di numeri uguali si ottiene un numero pari. Pertanto si può avere un numero dispari di caselle nere solo in un quadrato di lato dispari.

In un quadrato di lato dispari ci sarà uno dei colori che ha una casella in più dell'altro: il primo colore sarà in un numero dispari di caselle, il secondo in un numero pari. Inoltre, fissato un asse di simmetria della scacchiera parallelo ad uno dei suoi lati, per ogni quadrato Q con un numero dispari di caselle nere (e un numero pari di caselle bianche), il quadrato Q', simmetrico di Q rispetto a tale asse, avrà un numero dispari di caselle bianche (e un numero pari di caselle nere).

Possiamo concludere che i quadrati con un numero dispari di caselle nere sono la metà di tutti i quadrati di lato dispari contenuti nella scacchiera. Contiamo questi quadrati. I quadrati di lato 1 sono $8 \cdot 8$. I quadrati di lato 3 sono $6 \cdot 6$ (ciascuno di loro è infatti individuato dalla scelta di 3 righe consecutive e 3 colonne consecutive, ciascuna delle quali può essere fatta in 6 modi diversi). Analogamente, i quadrati di lato 5 sono $4 \cdot 4$ e i quadrati di lato 7 sono $2 \cdot 2$.

Allora i quadrati di lato dispari sono in tutto $8^2 + 6^2 + 4^2 + 2^2 = 120$ e i quadrati con un numero dispari di caselle nere sono la metà di questi, cioè 60.