

Roma, 2 aprile 2008

PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA – SEZIONE DI ROMA

GARA INDIVIDUALE

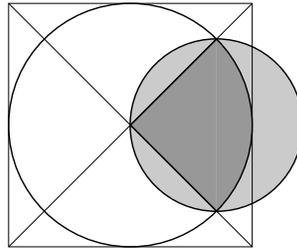
Dipartimenti di Matematica delle Università
Sapienza, Tor Vergata, Roma Tre

con il sostegno di:

Unione Matematica Italiana, Istituto Nazionale di Alta Matematica,
Progetto Lauree Scientifiche, CARFID

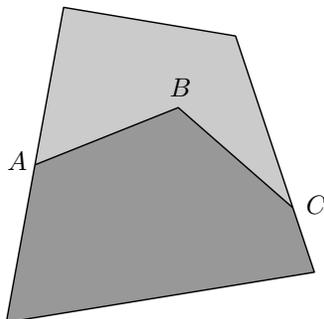
tempo a disposizione: 1 ora e 10 minuti

Quesito 1. Dimostrare che la superficie grigio chiaro ha la stessa area di quella grigio scuro.



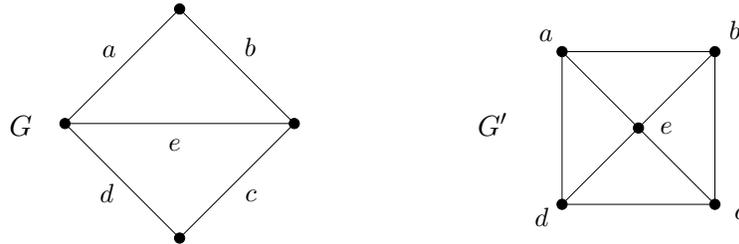
Quesito 2. Sia P un punto interno a un triangolo ABC . Siano \mathcal{S}_A , \mathcal{S}_B ed \mathcal{S}_C le circonferenze passanti per P con centro in A , B e C , rispettivamente. Dimostrare che, oltre a P , non ci sono altri punti appartenenti a tutti e tre i cerchi (pieni) delimitati da \mathcal{S}_A , \mathcal{S}_B ed \mathcal{S}_C .

Quesito 3. Il quadrilatero in figura è diviso dalla spezzata ABC in due parti di area S e T . Descrivere un procedimento con riga e compasso per sostituire la spezzata con un segmento che divida ancora il quadrilatero in due parti di area S e T .



Quesito 4. Dimostrare che la somma di due numeri primi consecutivi maggiori di 2 è prodotto di almeno tre fattori primi (eventualmente ripetuti).

Quesito 5. Un *grafo* è una figura G costituita da un insieme di punti, detti *vertici*, ed un insieme di linee, dette *spigoli*, che uniscono alcune coppie di vertici (è possibile che la stessa coppia di vertici sia congiunta da più di uno spigolo). Assegnato un grafo G , il *grafo derivato* di G è il grafo G' che ha un vertice per ogni spigolo di G , e tale che due vertici di G' sono uniti da uno spigolo se e solo se gli spigoli corrispondenti di G hanno un vertice in comune. Per esempio, in figura sono riportati un grafo G ed il suo derivato G' .



Due grafi sono considerati *uguali* se esiste una corrispondenza biunivoca tra i loro vertici e i loro spigoli, e vertici corrispondenti sono uniti da spigoli corrispondenti. Si dimostrino, oppure si confutino con controesempi, le due affermazioni che seguono.

- (a) Se G_1 e G_2 hanno stesso numero di vertici e di spigoli, e se $G'_1 = G'_2$, allora $G_1 = G_2$.
- (b) Per ogni grafo G esiste un grafo G_0 tale che $G'_0 = G$.