Roma, 2 aprile 2008

PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA – SEZIONE DI ROMA

GARA INDIVIDUALE

Dipartimenti di Matematica delle Università
Sapienza, Tor Vergata, Roma Tre

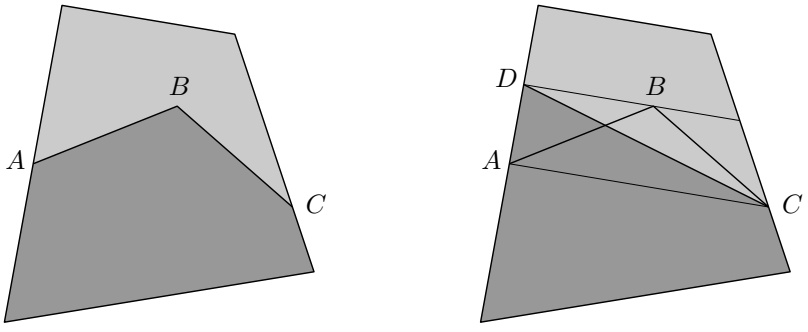
con il sostegno di:
Unione Matematica Italiana, Istituto Nazionale di Alta Matematica,
Progetto Lauree Scientifiche, CARFID

tempo a disposizione: 1 ora e 10 minuti

Soluzione 1. Sia r il raggio del cerchio più grande. La superficie grigio scuro è un quarto del cerchio e ha quindi area $A = \pi r^2/4$. Il diametro del cerchio piccolo è la diagonale di un quadrato di lato r ed è quindi uguale ad $r\sqrt{2}$. Allora il raggio del cerchio piccolo è $r\sqrt{2}/2$ e la sua area vale $B = \pi r^2/2 = 2A$. La superficie grigio chiaro ha area $B - A = A$.

Soluzione 2. Sia Q un punto interno al triangolo distinto da P. Per mostrare che Q non può appartenere a tutti e tre i cerchi, consideriamo l'asse r del segmento PQ. La retta r incontra almeno un lato del triangolo in un punto diverso dai vertici. Supponiamo che incontri il lato AB e che il vertice A sia dalla stessa parte di P rispetto ad r. Questo significa che $\overline{AP} < \overline{AQ}$. Dunque Q non appartiene al cerchio delimitato da $\mathcal{S}_A$.

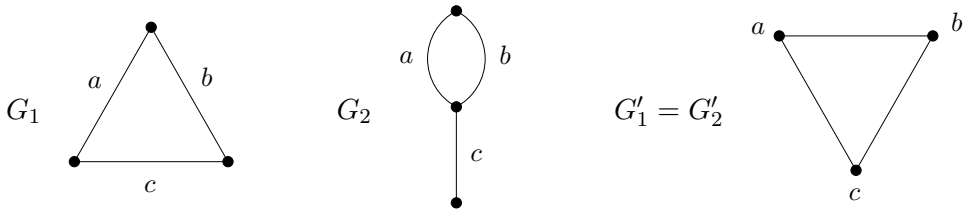
Soluzione 3. Si traccino la retta r passante per A e per C e la retta s passante per B e parallela ad r. Detto D il punto di intersezione di s con il lato del quadrilatero contenente A, il segmento DC soddisfa la richiesta. Infatti i triangoli ABC e ADC hanno la stessa area, avendo stessa base AB e stessa altezza, pari alla distanza tra le rette parallele r ed s. Dunque l'area del quadrilatero "sotto" il segmento CD è uguale all'area "sotto" la spezzata ABC, diciamo S, e l'area "sopra" è la differenza tra l'area del quadrilatero e l'area S, ovvero T.



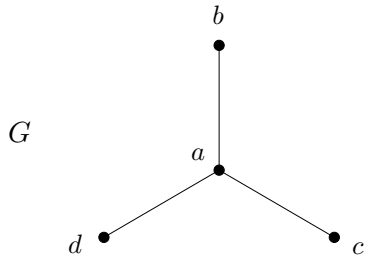
Soluzione 4. Siano p e q due primi consecutivi maggiori di 2. Essendo p e q dispari, la somma $p+q$ è pari: $p+q=2n$ per un opportuno intero n. Si ha $n=(p+q)/2$, dunque $p<n<q$. Allora, poiché p e q sono primi consecutivi, n non può essere primo. Ovviamente $n\neq 1$, dunque n è prodotto di almeno due fattori primi (eventualmente ripetuti) e $p+q=2n$ è prodotto di almeno tre fattori primi (eventualmente ripetuti).

Soluzione 5. Le due affermazioni sono entrambe false.

Un controesempio alla prima affermazione è dato dai grafi riportati in figura. I grafi G_1 e G_2 sono diversi, entrambi con tre vertici e tre spigoli, ma $G_1'=G_2'$.



Per mostrare la falsità della seconda affermazione, si consideri il grafo G in figura.



Supponiamo che esista un grafo G_0 tale che G sia il derivato di G_0. Allora il grafo G_0 dovrebbe avere quattro spigoli, a, b, c, d, corrispondenti ai vertici di G, e lo spigolo a dovrebbe avere un vertice in comune con ciascuno degli altri tre. Ma allora, poiché uno spigolo ha solo due estremi, almeno due degli altri tre spigoli b, c, d dovrebbero avere un vertice in comune. Ma questo è escluso, perché in G i tre vertici b, c, d non sono collegati da spigoli.