PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA - SEZIONE DI ROMA

SOLUZIONI DELLA GARA A SQUADRE

1. La risposta corretta è **(D)**. Basta scrivere gli sviluppi decimali fino a sei cifre dopo la virgola:

$$\begin{aligned} 7,\overline{37} &= 7,373737\ldots, \\ 7,3\overline{737} &= 7,373773\ldots, \\ 7,3\overline{7} &= 7,377777\ldots, \\ 7,37\overline{373} &= 7,373733\ldots, \\ 7,3\overline{73737} &= 7,373737\ldots, \end{aligned}$$

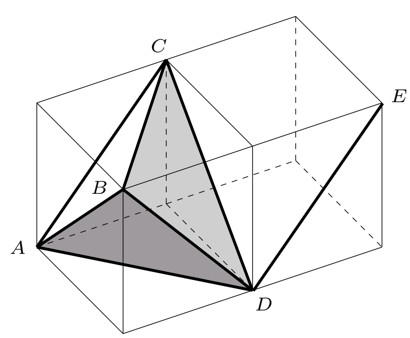
per convincersi che tra i cinque numeri il più piccolo è il quarto.

2. La risposta corretta è **(A)**. Sappiamo che ogni poligono si può suddividere in triangoli qualsiasi. D'altra parte, ciascun triangolo può essere suddividiso in triangoli isosceli. Un metodo consiste nel tracciare i tre raggi della circonferenza inscritta che congiungono il centro con i punti di tangenza, e i tre segmenti che congiungono i punti di tangenza: il triangolo risulta così scomposto in sei triangoli isosceli.

3. La risposta corretta è **(E)**. L'ultima affermazione equivale a dire che, se un numero n è primo, allora sicuramente n è la somma di due numeri primi. Invece il numero 17, pur essendo primo, non si può scrivere come somma di due numeri primi (essendo dispari, dovrebbe essere somma di un primo pari e di un primo dispari, ma l'unico primo pari è 2 e $17-2=15$ non è primo). Diamo dei controesempi per le altre quattro affermazioni, osservando che 17 non lo è per nessuna di queste: il numero 2 è primo e pari; il numero 35, pur non essendo divisibile né per 2 né per 3, non è primo; il numero 10 non è primo, ma non è divisibile per il quadrato di un numero primo; il numero 65 è uguale a 8^2+1, ma non è primo.

4. La risposta corretta è **(C)**. Un numero è divisibile per 3 se e solo se la somma delle sue cifre è a sua volta divisibile per 3. Dato che, nella parola "ECLISSE", ci sono due E, due S, una C, una I e una L, il numero ottenuto dopo la sostituzione è multiplo di 3 se e solo se $2e+2s+c+i+l$ è multiplo di 3 (dove e, s, c, i, l indicano le cifre sostituite rispettivamente ad E, S, C, I, L). Essendo $e+s+c+i+l = 1+2+3+4+5 = 15$, multiplo di 3, si ha che $2e+2s+c+i+l$ è multiplo di 3 se e solo se lo è $2e+2s+c+i+l-(e+s+c+i+l) = e+s$. Si tratta quindi di scegliere le cifre distinte e ed s tra 1, 2, 3, 4, 5, in modo che $e+s$ sia multiplo di 3. Scegliendo $e=1$, possiamo prendere $s=2$ o $s=5$, e similmente, scegliendo $e=2$ o $e=4$ o $e=5$, ci sono due possibili valori per s. Invece, ponendo $e=3$, non c'è modo di far sì che $e+s$ sia divisibile per 3. Un discorso analogo vale per la cifra s. Una volta fissate e ed s, le cifre distinte c, i ed l possono essere scelte arbitrariamente.

5. La risposta corretta è **(B)**. Possiamo disporre il tetraedro in modo che i suoi quattro spigoli siano diagonali delle facce di un cubo di lato $\sqrt{2}/2$. Se consideriamo un secondo cubo che ha in comune con il primo la faccia contenente CD (oppure la faccia contenente AD), si vede facilmente che il punto E è un vertice di tale cubo, precisamente il simmetrico di B rispetto al piano contenente la faccia in comune. Il triangolo DBE è rettangolo e isoscele, dunque $\overline{EB} = \overline{DB}\sqrt{2} = \sqrt{2}$.

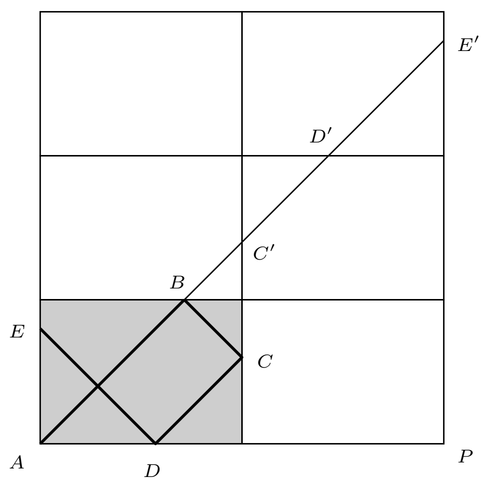


6. La risposta corretta è **(C)**. Gli unici interi n tra 1 e 5 per cui $n!+24$ è un quadrato sono $n=1$ ($1!+24=5^2$) e $n=5$ ($5!+24=12^2$). Mostriamo che non ce ne sono altri. Supponiamo $n \geqslant 6$. Essendo $24 = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$, possiamo scrivere

$$n!+24 = 24\cdot[n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 6\cdot 5+1].$$

Essendo $24 = 2^3 \cdot 3$, affinché tale numero sia un quadrato, è necessario che il numero tra parentesi quadre sia divisibile per 2 e per 3. Ma questo non è possibile, perché tale numero è il successivo di un multiplo di 6, quindi è dispari e diviso per 3 dà resto 1.

7. La risposta corretta è **(E)**. Sia A il punto di partenza e siano B, C, D ed E i punti di incontro con la prima, la seconda, la terza e la quarta sponda, rispettivamente. A priori, non è chiaro se il punto E si trovi sulla sponda corta del biliardo o su quella lunga. Consideriamo sei copie del biliardo disposte in una griglia 2×3 in un rettangolo di dimensioni $2\sqrt{2}\,\mathrm{m} \times 3\,\mathrm{m}$ (come in figura) e siano C', D' ed E' i punti in cui il prolungamento di AB incontra, nell'ordine, i lati dei rettangoli. I segmenti BC', $C'D'$ e $D'E'$ corrispondono, a meno di simmetrie, ai tratti BC, CD e DE della traiettoria, rispettivamente. Poiché questa forma un angolo di 45 gradi con i lati del biliardo, con riferimento alla notazione in figura, si ha $\overline{E'P} = \overline{AP} = 2\sqrt{2}\,\mathrm{m}$. Essendo $2 < 2\sqrt{2} < 3$, il punto E', e dunque anche il suo corrispondente E, si trova sulla sponda corta del biliardo. Infine, la traiettoria $ABCDE$ ha la stessa lunghezza del segmento AE'. Questa è la diagonale di un quadrato di lato $2\sqrt{2}\,\mathrm{m}$, ed è quindi lunga $2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 4\,\mathrm{m}$.



8. La risposta corretta è **(D)**. Visto che lo spazio (lunghezza del tratto di strada) è costante, la velocità e il tempo sono inversamente proporzionali. Se la velocità diminuisce del 10%, la velocità diventa $0,9 \cdot v$ e il tempo corrispondente è $t/0,9 = (10/9)t = 1,111\ldots \cdot t$. Quindi il tempo aumenta più del 10%. Analogamente, se la velocità aumenta del 10%, la velocità diventa $1,1 \cdot v$ e il tempo corrispondente è $t/1,1 = (10/11)t = 0,9090\ldots \cdot t$. Quindi il tempo diminuisce meno del 10%.

La situazione è più chiara se si considera una percentuale del 100% invece del 10%. Se la velocità diminuisce del 100%, diventa... nulla e il tempo aumenta molto più del 100% (in un certo senso diventa infinito); se invece la velocità aumenta del 100%, cioè raddoppia, il tempo si dimezza e quindi diminuisce solo del 50%.

9. La risposta corretta è **(D)**. Si deve calcolare in quanti modi è possibile ottenere il risultato n, dove n, essendo il risultato della somma dei punteggi di due dadi, è un intero compreso tra 2 e 12. Se la coppia (non ordinata) di punteggi “superstiti” è $\{a, b\}$, con $a \leqslant b$, la terna originaria dovrà essere $\{x, a, b\}$ con $x \leqslant a$. Ad esempio, per $n = 8$, la coppia sarà una tra $\{2, 6\}$, $\{3, 5\}$ e $\{4, 4\}$ e la terna originaria dovrà essere $\{x, 2, 6\}$ con $x \leqslant 2$, oppure $\{x, 3, 5\}$ con $x \leqslant 3$, oppure $\{x, 4, 4\}$ con $x \leqslant 4$. Quindi le terne non ordinate per le quali si ottiene 8 sono tutte e sole le seguenti:

$$\{1,2,6\}, \{2,2,6\}, \{1,3,5\}, \{2,3,5\}, \{3,3,5\}, \{1,4,4\}, \{2,4,4\}, \{3,4,4\}, \{4,4,4\}$$

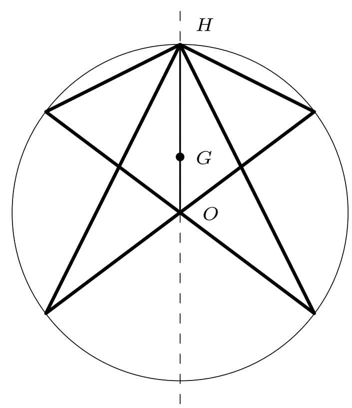
Ora dobbiamo contare in quanti modi si può ottenere ciascuna di queste terne, ovvero quante sono le terne ordinate (i lanci di dadi) distinte corrispondenti ad ogni terna non ordinata nell'elenco. È facile convincersi che le terne con tre numeri distinti (che chiamiamo di primo tipo) si possono ottenere in 6 modi diversi, le terne $\{x, y, y\}$ con $x \neq y$ (secondo tipo) in 3 modi diversi e le terne $\{x, x, x\}$ (terzo tipo) in un solo modo. Notiamo inoltre che una coppia “superstite” $\{a, b\}$, con $a < b$, corrisponde ad $a - 1$ terne del primo tipo più una del secondo tipo, dunque si può ottenere in $6(a-1) + 3 = 6a - 3$ modi. Viceversa, una coppia “superstite” $\{a, a\}$ corrisponde ad $a - 1$ terne del secondo tipo più una del terzo tipo, dunque si può ottenere in $3(a-1) + 1 = 3a - 2$ modi. Considerando ad esempio il caso $n = 8$, la coppia $\{2, 6\}$ si può ottenere in $6 \cdot 2 - 3 = 9$ modi, la coppia $\{3, 5\}$ in $6 \cdot 3 - 3 = 15$ modi e la coppia $\{4, 4\}$ in $3 \cdot 4 - 2 = 10$ modi, per un totale di 34 modi.

Procedendo in modo analogo, per ogni n tra 2 e 12 si trova

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
modi	1	3	7	12	19	27	34	36	34	27	16

Il risultato più probabile è dunque 9. Per completezza calcoliamo la probabilità che il risultato sia 9. Poiché per ogni dado ci sono 6 punteggi possibili, lanciando tre dadi si hanno $6^3 = 216$ casi possibili. I casi favorevoli sono 36 e dunque la probabilità di ottenere 9 è $36/216 = 1/6$.

10. La risposta corretta è **(D)**. In primo luogo, si osservi che due triangoli simmetrici sono uguali e dunque hanno lo stesso perimetro e la stessa area. Ricordiamo che in un triangolo rettangolo l'ortocentro H (punto d'incontro delle altezze) coincide con il vertice dell'angolo retto, il circocentro O (punto d'incontro degli assi e centro del cerchio circoscritto) è il punto medio dell'ipotenusa e il raggio della ciconferenza circoscritta è OH. Inoltre il baricentro G divide la mediana OH in due parti, una doppia dell'altra. Quindi H, O e G appartengono tutti alla mediana uscente dall'angolo retto. I due triangoli hanno tale mediana in comune, quindi hanno lo stesso ortocentro, lo stesso baricentro e lo stesso cerchio circoscritto. Invece, i cerchi inscritti nei due triangoli non coincidono, perché in un triangolo rettangolo l'incentro (centro del cerchio inscritto) giace sulla bisettrice dell'angolo retto: dato che il triangolo di partenza non è isoscele, le bisettrici degli angoli retti dei due triangoli non coincidono e hanno come unico punto d'intersezione il vertice dell'angolo retto, che non può essere l'incentro dei triangoli, trovandosi a distanza zero da due lati.



11. La risposta corretta è **(B)**. Vogliamo determinare il minimo di un'espressione della forma

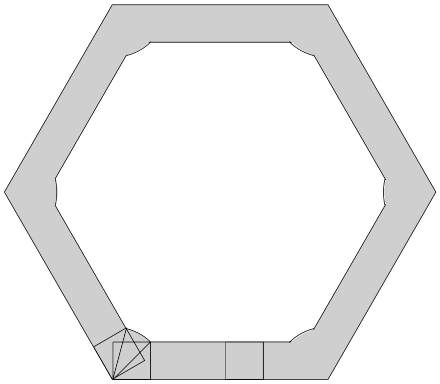
$$f(x) = |x - a_1| + |x - a_2| + |x - a_3| + |x - a_4| + |x - a_5| + |x - a_6|,$$

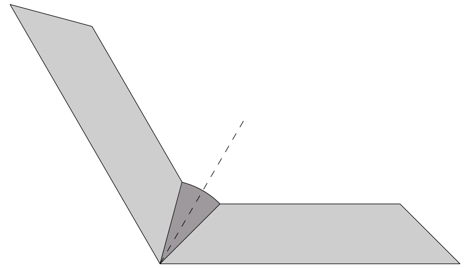
dove gli a_i sono numeri reali distinti. Possiamo supporre di aver riordinato gli a_i, in modo che $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6$. Si può procedere in vari modi, ad esempio distinguendo i casi $x \leqslant a_1$, $a_1 < x \leqslant a_2$, etc. In ciascuno di questi intervalli abbiamo a che fare con una retta, quindi $f(x)$ è una funzione lineare a tratti. Un modo più veloce consiste nell'osservare che

$$|x - a_1| + |x - a_6| = |a_1 - x| + |x - a_6| \geqslant |(a_1 - x) + (x - a_6)| = |a_6 - a_1| = a_6 - a_1$$

dove possiamo scrivere "=" al posto del "$\geqslant$" se e solo se x è compreso tra a_1 ed a_6. Analogamente abbiamo $|x-a_2|+|x-a_5| \geqslant a_5-a_2$ e vale l'uguaglianza se e solo se $a_2 \leqslant x \leqslant a_5$. Infine, $|x-a_3|+|x-a_4| \geqslant a_4-a_3$ e vale l'uguaglianza se e solo se $a_3 \leqslant x \leqslant a_4$. Quindi l'espressione assume sempre un valore maggiore o uguale ad $(a_6 - a_1) + (a_5 - a_2) + (a_4 - a_3)$ e assume tale valore se e solo se $a_3 \leqslant x \leqslant a_4$. Nel nostro caso i numeri a_i valgono, nell'ordine, -13, -4, 1, 14, 20 e 23. Dunque il minimo viene assunto per $1 \leqslant x \leqslant 14$ e vale $(23 + 13) + (20 + 4) + (14 - 1) = 73$.

12. La risposta corretta è **(B)**. L'area spazzata è mostrata in figura. Possiamo suddividere tale area in sei trapezi uguali, uno per ciascun lato dell'esagono, e sei settori circolari uguali, uno per ciascun vertice. Il trapezio è isoscele, ha base maggiore 5 m, altezza 1 m, e i suoi lati obliqui formano angoli di 45 gradi con la base. La sua area è $4\,\mathrm{m}^2$, quindi l'unione dei sei trapezi ha area $6 \cdot 4 = 24\,\mathrm{m}^2$. Il settore circolare ha raggio $\sqrt{2}\,\mathrm{m}$, pari alla diagonale del quadrato di lato 1 m, e angolo al centro $120 - 45 - 45 = 30$ gradi. L'unione dei sei settori è equivalente ad un settore con angolo al centro $6 \cdot 30 = 180$ gradi, ovvero a un semicerchio. La sua area è $\pi(\sqrt{2}\,)^2/2 = \pi\,\mathrm{m}^2$.





13. La risposta corretta è **(D)**. Mostriamo che le uniche due funzioni che soddisfano l'identità data sono $F(x) = x$ e $F(x) = -x$. Ponendo $y = 1$, si ha $F(x+F(1)) = F(x)+1$, cioè aumentando di $F(1)$ l'argomento della funzione, il risultato aumenta di 1. Analogamente, ponendo $y = 2$, si ottiene $F(x+F(2)) = F(x)+2$, cioè aumentando di $F(2)$ l'argomento, il risultato aumenta di 2. Ora, se aumentiamo l'argomento di $F(1)F(2)$, il risultato aumenta di 1 per $F(2)$ volte, per la prima osservazione, ma anche di 2 per $F(1)$ volte, per la seconda. Pertanto questi due valori devono coincidere: $F(2) = 2F(1)$. Ragionando in maniera simile, si scopre che $F(x) = xF(1)$ per ogni intero positivo x. Con qualche passaggio in più, si vede che la stessa uguaglianza vale per $x = 0$ e per ogni intero negativo x. Posto $F(1) = a$, abbiamo cioè $F(x) = ax$. Sostituendo questa informazione nell'identità, otteniamo $a(x + ay) = ax + y$, cioè $ax + a^2y = ax + y$. Pertanto $a^2y = y$ per ogni y, da cui segue $a^2 = 1$. Concludiamo che $F(1)$ può valere 1 o -1. Quindi $F(x) = x$ per ogni x oppure $F(x) = -x$ per ogni x. La condizione $F(13) < 0$ impone che la funzione sia la seconda. Quindi necessariamente $F(2008) = -2008$.

14. La risposta corretta è **(B)**. Si verifica direttamente che sono ammissibili le sequenze di età: $(11, 17, 19)$, $(29, 31, 37)$ e $(53, 59, 61)$. Invece 41 non può essere l'età del più giovane (perché 49 non è primo), o del meno giovane (33 non è primo). Non può nemmeno essere l'età intermedia, perché le sequenze $(39, 41, 47)$, $(37, 41, 45)$ e $(35, 41, 43)$ contengono tutte numeri non primi.

15. La risposta corretta è **(D)**. Per ottenere un numero del tipo richiesto, è sufficiente decidere quali sono le uniche due cifre che non vi appaiono. Quindi tali numeri sono tanti quanti i sottoinsiemi di due elementi dell'insieme $\{1, 2, \dots, 9\}$, ovvero $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \dots \{1, 9\}, \{2, 3\}, \dots \{2, 9\}, \dots, \{8, 9\}$. In altri termini, si tratta delle combinazioni di 9 elementi presi a 2 a 2. Dunque il numero richiesto è

$$8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = \frac{9 \cdot 8}{2} = 36.$$

16. La risposta corretta è **(A)**. Mostriamo che una sezione quadrata di un tetraedro deve essere necessariamente parallela a due spigoli non adiacenti del tetraedro e che i suoi quattro vertici devono essere i punti medi degli altri quattro spigoli. Affinché la sezione sia un quadrilatero, il piano che la determina deve intersecare esattamente quattro dei sei spigoli del tetraedro. Se, per assurdo, tale piano non fosse parallelo ad uno degli altri due spigoli, allora intersecherebbe il prolungamento di tale spigolo in un punto P. Dunque i prolungamenti dei due lati della sezione appartenenti alle facce del tetraedro incidenti tale spigolo si incontrerebbero in P, e quindi tali lati non sarebbero paralleli. Ma questo va contro la richiesta che la sezione sia quadrata. Quindi il piano che determina la sezione è parallelo ai due spigoli che non interseca e questo implica che la sezione è rettangolare (le diagonali sono uguali per motivi di simmetria). Se x è la distanza di un vertice della sezione da un vertice del tetraedro che si trova sullo stesso spigolo, allora, considerando due opportuni triangoli equilateri, si osserva che i lati del rettangolo misurano x e $l - x$, dove l è il lato del tetraedro. Affinché questo sia un quadrato, si deve avere $x = l - x$, ovvero $x = l/2 = 3\,\text{cm}$. Quindi ogni vertice della sezione deve essere il punto medio di uno spigolo del tetraedro. Allora l'area della sezione è $x^2 = 9\,\text{cm}^2$.