Roma, 19 marzo 2009

PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA – SEZIONE DI ROMA

GARA INDIVIDUALE

Dipartimenti di Matematica delle Università
Sapienza, Tor Vergata, Roma Tre

con il sostegno di:
Unione Matematica Italiana, Istituto Nazionale di Alta Matematica,
Progetto Lauree Scientifiche, CARFID

tempo a disposizione: 1 ora e 20 minuti

Quesito 1. Siano Γ_1, Γ_2 e Γ_3 le tre circonferenze aventi per diametro i tre lati di un triangolo. Sia r la retta che passa per i due punti di intersezione delle circonferenze Γ_1 e Γ_2; sia s la retta che passa per i due punti di intersezione delle circonferenze Γ_1 e Γ_3; sia t la retta che passa per i due punti di intersezione delle circonferenze Γ_2 e Γ_3.

(a) Le tre circonferenze Γ_1, Γ_2 e Γ_3 passano sempre per uno stesso punto?

(b) Le tre rette r, s e t passano sempre per uno stesso punto?

Quesito 2. Una mattina, in una classe composta da 10 alunni, il professore di Italiano interroga due studenti, estraendoli a sorte. Lo stesso giorno, anche il professore di Matematica interroga due studenti, con una nuova estrazione a sorte. Qual è la probabilità che ci sia uno e un solo studente che, quel giorno, è interrogato sia in Italiano che in Matematica?

Quesito 3. Trovare tutte le coppie (a, b) di numeri interi relativi tali che $a^3 - b^3 = 728$.

Quesito 4. Siano r e s due rette sghembe nello spazio.

(a) Esistono due piani paralleli che contengono rispettivamente le rette r e s?

(b) Esistono due piani perpendicolari che contengono rispettivamente le rette r e s?

Se la risposta è affermativa, spiegare come si possono costruire i piani di cui si parla; se la risposta è negativa, descrivere una configurazione per cui non esistano i piani richiesti.

Quesito 5. Anna e Bruno hanno inventato un gioco. Hanno preso delle monete e le hanno impilate in tre colonne A, B e C. Siano a, b e c le altezze delle colonne A, B e C (con altezza di una colonna indichiamo il numero delle monete di cui è composta). All'inizio si ha $a \geqslant b \geqslant c$. A turno Anna e Bruno effettuano una tra le seguenti mosse, a condizione che dopo ogni mossa risulti sempre $a \geqslant b \geqslant c$:

(1) spostare una moneta da A a B oppure spostare una moneta da B a C;

(2) togliere una moneta ciascuna da due colonne adiacenti (A e B oppure B e C).

Perde chi non può più fare una mossa. Sapendo che inizia il gioco Anna e che le altezze delle colonne sono inizialmente 91, 86 e 67, dire se il gioco termina e se è possibile prevedere chi sarà il vincitore.