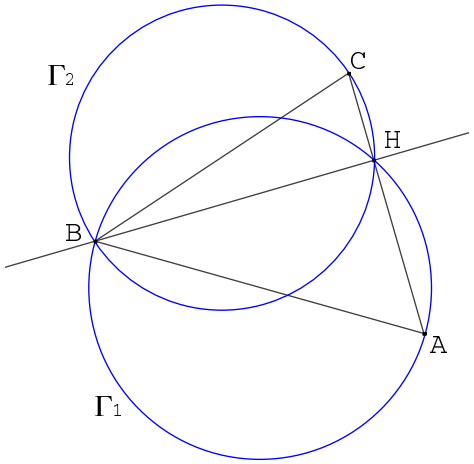
PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA – SEZIONE DI ROMA

SOLUZIONI DELLA GARA INDIVIDUALE

Soluzione 1. In primo luogo, osserviamo che la circonferenza che ha per diametro un lato AB di un triangolo passa per i piedi delle altezze uscenti dai vertici A e B (questo dipende dal fatto che un triangolo rettangolo è inscritto in una semicirconferenza). Sia ABC il triangolo e sia BH l'altezza uscente dal vertice B. Se Γ_1 ha per diametro il lato AB e Γ_2 ha per diametro il lato BC, allora le circonferenze Γ_1 e Γ_2 si incontrano nei punti B e H. Di conseguenza la risposta alla domanda **(a)** è in generale negativa, perché Γ_3 non passa né per B né per H (tranne nel caso in cui il triangolo sia rettangolo). Da quanto visto, segue che la retta r che passa per i punti di intersezione di Γ_1 e Γ_2 contiene l'altezza BH del triangolo. Analogamente, le rette s e t contengono le altre due altezze del triangolo: quindi, le tre rette r, s e t passano sempre per uno stesso punto (l'ortocentro del triangolo).



Soluzione 2. Ci sono molti modi per arrivare alla risposta corretta. Uno dei più rapidi è il seguente. Siano A e B gli studenti estratti dal professore di Italiano. Il numero dei casi possibili relativi all'estrazione del professore di Matematica è

$$\binom{10}{2} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45.$$

Di questi, i casi favorevoli sono quelli in cui, fra i due studenti sorteggiati, c'è A o B (uno dei due) e uno studente fra i rimanenti 8. Il numero dei casi favorevoli all'evento considerato è quindi $2 \cdot 8 = 16$. La probabilità richiesta è pertanto $16/45$.

Soluzione 3. Ci sono sei soluzioni: $(12, 10)$, $(-10, -12)$, $(9, 1)$, $(-1, -9)$, $(8, -6)$ e $(6, -8)$. Osserviamo che 728 non è un cubo, quindi né a né b possono essere uguali a 0. Inoltre, se (a, b) è una soluzione, anche $(-b, -a)$ è soluzione.

Se a è positivo e b è negativo, allora il problema consiste nel trovare due cubi positivi la cui somma sia 728. L'unica possibilità è $728 = 512 + 216 = 8^3 + 6^3$. Questo corrisponde alle soluzioni $(a, b) = (8, -6)$ e $(a, b) = (6, -8)$. Chiaramente non si potrà avere a negativo e b positivo. Assumiamo allora $a, b > 0$. In questo caso $a > b$, cioè $a - b > 0$.

Siccome $a^3 - b^3$ è pari, a e b sono entrambi pari o entrambi dispari; in tutti e due i casi $a - b$ è pari. L'uguaglianza data si può scrivere nella forma

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = 728.$$

Si ha $(a - b)(a^2 + ab + b^2) \geqslant (a - b)(a^2 - 2ab + b^2) = (a - b)^3$. Dunque

$$728 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) \geqslant (a - b)^3,$$

da cui si ricava $a - b \leqslant \sqrt[3]{728} < \sqrt[3]{729} = 9$. Dunque $a - b$ è positivo, pari, minore o uguale a 8; non può essere 6, perché 728 non è divisibile per 6. Ci sono quindi tre possibilità:

- $a - b = 2$, da cui segue $a^2 + ab + b^2 = 364$; l'unica soluzione accettabile è $(a, b) = (12, 10)$.
- $a - b = 4$; nessuna soluzione è accettabile (le soluzioni non sono razionali).
- $a - b = 8$; l'unica soluzione accettabile è $(a, b) = (9, 1)$.

Soluzione 4. **(a)** La risposta è affermativa. Fissato un punto P di s, sia r' la retta passante per P parallela ad r. Sia α il piano individuato dalle due rette incidenti s e r'. La retta r è parallela alla retta r' e dunque al piano α (se a e b sono due rette parallele nello spazio, allora a è parallela ad ogni piano passante per b). Analogamente, fissato un punto Q di r, sia s' la retta passante per Q parallela ad s e sia β il piano individuato dalle due rette incidenti r e s'. La retta s è parallela al piano β. A questo punto, è facile concludere che i due piani α e β sono paralleli.

(b) Anche in questo caso la risposta è affermativa. Si consideri un qualunque piano che contiene s, ad esempio il piano α individuato nella parte precedente. Tracciata la retta perpendicolare h da un punto Q di r al piano α, si consideri il piano γ individuato dalle due rette incidenti r e h. I piani α e γ contengono rispettivamente le rette s e r e sono perpendicolari tra loro, perché γ contiene h che è perpendicolare ad α.

Soluzione 5. Il gioco termina e il vincitore è Bruno.

Consideriamo la quantità $3a+2b+c$ ed osserviamo che questa cala ad ogni mossa: infatti con il primo tipo di mossa cala di 1, mentre con il secondo tipo di mossa cala di 5 (se tolgo una moneta da A e da B) o di 3 (se tolgo una moneta da B e da C). Poiché tale quantità non è mai negativa, il gioco dovrà per forza terminare e alla fine ci sarà sicuramente un vincitore.

Mostriamo adesso che alla fine del gioco avremo necessariamente $a = b = c = 0$. Infatti esistono solo due situazioni in cui non si possono effettuare mosse: $(a, b, c) = (0, 0, 0)$ oppure $(a, b, c) = (1, 0, 0)$. Osserviamo che la parità della somma delle altezze $a + b + c$ non cambia dopo ogni mossa, quindi nel nostro caso l'unica possibile situazione finale è $(a, b, c) = (0, 0, 0)$.

Supponiamo che durante il gioco siano state effettuate le seguenti mosse:

- m mosse del tipo spostare una moneta da A a B,
- n mosse del tipo spostare una moneta da B a C,
- p mosse del tipo togliere una moneta da A e da B,
- q mosse del tipo togliere una moneta da B e da C.

Al termine il numero di monete nella colonna A è calato di $m+p$ e il numero di monete nella colonna C è calato di $q-n$. Nel nostro caso avremo $m+p = 91$ e $q-n = 67$. Quindi i numeri m e p hanno parità diverse (sono uno pari e uno dispari), così come i numeri n e q. Il numero totale di mosse è dato da $m + n + p + q$, che è la somma di due pari e due dispari, e dunque è pari. Poiché sappiamo che ha iniziato Anna, ad effettuare l'ultima mossa sarà Bruno.