

Roma, 17 marzo 2010

PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA – SEZIONE DI ROMA

GARA INDIVIDUALE

Dipartimenti di Matematica delle Università
Sapienza, Tor Vergata, Roma Tre

con il sostegno di:

Unione Matematica Italiana, Istituto Nazionale di Alta Matematica,
Progetto Lauree Scientifiche, CARFID

tempo a disposizione: 1 ora e 20 minuti

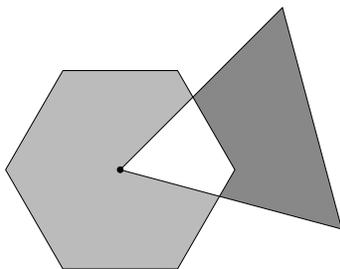
Quesito 1. Trovare tutte le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x + y = z + t, \\ x^3 + y^3 = z^3 + t^3. \end{cases}$$

In particolare, rispondere alle seguenti domande.

- (a) Esiste una soluzione in cui almeno uno dei quattro numeri è diverso da 0?
- (b) Esiste una soluzione in cui tutti e quattro i numeri sono diversi da 0?
- (c) Esiste una soluzione in cui i quattro numeri sono a due a due distinti fra loro?

Quesito 2. Si considerino un esagono regolare E di lato a , e un triangolo equilatero T di lato $2a$. Un vertice del triangolo coincide con il centro dell'esagono, come in figura.



Quali sono il valore minimo e il valore massimo del rapporto tra le aree delle due parti non sovrapposte di T e di E (area grigio scura diviso area grigio chiara)?

Quesito 3. Dati quattro punti A, B, C e D nello spazio tridimensionale, dimostrare che i punti medi dei segmenti AB, BC, CD e DA sono contenuti in un piano.

Quesito 4. Ci sono 27 cubetti uguali di spigolo 1, con faccette colorate con 6 colori diversi. Calcolare la probabilità che, disponendoli casualmente insieme per formare un cubo più grande di spigolo 3, il cubo così ottenuto abbia facce ognuna di un unico colore.

Quesito 5. Antonio e Beatrice fanno il seguente gioco. Sul tavolo ci sono 100 gettoni. Ciascuno dei due, a turno, toglie un numero di gettoni che sia una potenza di 2 (cioè toglie, a sua scelta, un gettone, oppure 2, 4, 8, etc.). Chi prende l'ultimo gettone perde. Antonio fa la prima mossa. Se entrambi i giocatori giocano nel modo migliore, chi vince?