PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA - SEZIONE DI ROMA

GARA A SQUADRE

Dipartimenti di Matematica delle Università Sapienza, Tor Vergata e Roma Tre

Con il sostegno di:
Unione Matematica Italiana, Istituto Nazionale di Alta Matematica,
Progetto Lauree Scientifiche, CARFID, Ateneo della Scienza e della Tecnologia

11 marzo 2010

1. Sapendo che le due radici dell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ sono una il doppio dell'altra, si può affermare che:

(A) $|c| \geqslant |b|$
(B) b e c sono concordi (cioè hanno lo stesso segno)
(C) b e c sono discordi (cioè hanno segno diverso)
(D) se a e c sono razionali, allora anche b è razionale
(E) $b^2 \leqslant 5ac$

2. Una società finanziaria propone un nuovo tipo di investimento: il capitale investito x_0 sarà vincolato per 3 anni (cioè si potrà ritirare il capitale solo dopo 3 anni) e varierà mensilmente secondo la seguente formula

$$x_{n+1} = 1 + (x_n - 1)^{1/3} \ ,$$

dove l'unità di misura sono le migliaia di euro (cioè $x = 1$ indica una somma di 1000 euro); x_0 indica il capitale iniziale, ed x_n è il capitale rivalutato dopo n mesi. A un cliente, quale capitale x_0 converrà investire tra i seguenti?

(A) 999 euro
(B) 1000 euro
(C) 1001 euro
(D) 1999 euro
(E) 2001 euro

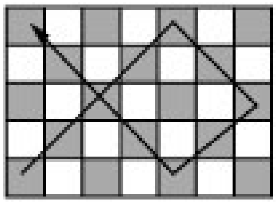
3. Nel piano sono dati 4 punti A, B, C, D e un ulteriore punto L. Siano M il simmetrico di L rispetto ad A, N il simmetrico di M rispetto a B, P il simmetrico di N rispetto a C, Q il simmetrico di P rispetto a D. Possiamo affermare che:

(A) se L coincide con Q, allora i segmenti AB e CD hanno uguali lunghezza e direzione
(B) se L coincide con Q, allora L appartiene al segmento AB
(C) se L coincide con Q, allora i segmenti AC e BD sono perpendicolari
(D) L e Q non possono mai coincidere
(E) L e Q coincidono sempre

4. Sia x un numero reale, con $x > 0$. Se $\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 = 7$, quanto vale $x^3 + \dfrac{1}{x^3}$?

(A) $3\sqrt{7}$
(B) $4\sqrt{7}$
(C) $\sqrt{3} + \sqrt{7}$
(D) 7
(E) $(\sqrt{7} - \sqrt{3})^3$

5. Sia data una scacchiera rettangolare con lato orizzontale lungo 209 caselle e lato verticale lungo 207 caselle. La scacchiera è colorata a caselle bianche e nere disposte come nell'usuale gioco degli scacchi. L'angolo in basso a sinistra è di colore nero, le caselle negli angoli sono indicate con le lettere A, B, C, D secondo lo schema nella figura a sinistra.



Partendo dalla casella A e muovendosi sempre sulle caselle nere, si procede in diagonale fino a che non si incontra un lato, in quel caso si rimbalza e si continua a procedere in diagonale lungo le caselle nere. Se si arriva in un angolo ci si ferma. Nella figura a destra è illustrato quello che succede nel caso di una scacchiera 7×5.

Nella scacchiera 209×207 questa passeggiata:

(A) teminerà in A
(B) teminerà in B
(C) teminerà in C
(D) teminerà in D
(E) non arriverà mai in un vertice

6. Marco è stato incaricato di piastrellare il pavimento di una stanza quadrata 7×7 con mattonelle 1×1 di colore bianco o nero. Diciamo che due mattonelle sono adiacenti se hanno un lato o un vertice in comune. La piastrellatura dovrà avere le seguenti proprietà:

i) ogni mattonella lungo il perimetro della stanza (ovvero vicino alle pareti) dovrà essere adiacente ad almeno altre tre mattonelle dello stesso colore,
ii) ogni mattonella nell'interno dovrà essere adiacente ad almeno altre cinque mattonelle dello stesso colore.

In quanti modi diversi Marco può piastrellare il pavimento?

(A) 2
(B) 6
(C) 10
(D) 30
(E) 32

7. Nella celebre isola di Smullyan vivono due tipi di abitanti: ci sono i furfanti, che mentono sempre, e i cavalieri, che dicono sempre la verità. Fra tre abitanti X, Y e Z dell'isola si svolge la seguente conversazione:

X: "Noi tre siamo tutti dello stesso tipo"
Y: "Due di noi sono dello stesso tipo, ma il terzo è di tipo diverso"
Z (indicando uno degli altri due): "Lui è del mio stesso tipo"

Che cosa si può dedurre su Z?

(A) Siamo in grado di stabilire sia se Z è un furfante o un cavaliere, sia chi ha indicato
(B) Sappiamo che Z è un cavaliere, ma non sappiamo chi ha indicato
(C) Sappiamo che Z è un furfante, ma non sappiamo chi ha indicato
(D) Non sappiamo se Z sia un furfante o un cavaliere, ma sappiamo che ha indicato X
(E) Non sappiamo se Z sia un furfante o un cavaliere, ma sappiamo che ha indicato Y

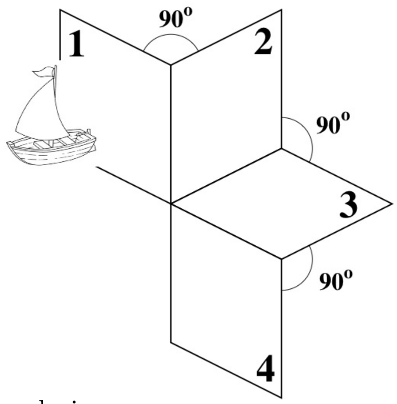
8. In una lontana Repubblica ci sono solo tre partiti: X, Y, Z. Alle ultime elezioni il partito X ha raddoppiato la sua percentuale, mentre la percentuale di Y è diminuita di un terzo e quella di Z è diminuita di un quarto. Possiamo dedurne che, prima delle elezioni, la percentuale di X era

(A) minore del 10%
(B) compresa fra il 10% e il 15%
(C) compresa fra il 15% e il 20%
(D) compresa fra il 20% e il 25%
(E) maggiore del 25%

9. In un triangolo i lati sono in progressione aritmetica. Vale allora la proprietà:

(A) il triangolo è rettangolo
(B) il raggio della circonferenza circoscritta è uguale al lato minore
(C) incentro e baricentro sono su una retta parallela al lato intermedio
(D) circocentro e incentro coincidono
(E) il diametro della circonferenza inscritta è minore della metà del lato maggiore

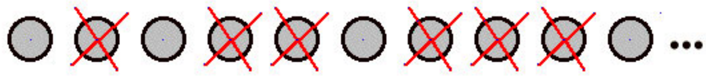
10. Lo specchio olografico in figura crea un'immagine tridimensionale ottenuta riflettendo virtualmente la barchetta rispetto alla lastra numero 1, quindi riflettendo la nuova immagine rispetto alla lastra numero 2, poi rispetto alla numero 3, e infine rispetto alla numero 4. Due lastre consecutive sono tra loro perpendicolari; le lastre 1 e 4 giacciono sullo stesso piano.



L'immagine finale è ottenuta dalla barchetta per:

(A) traslazione
(B) rotazione rispetto a un asse
(C) simmetria rispetto a un punto
(D) riflessione rispetto a un piano
(E) una riflessione rispetto a un piano, composta con una traslazione

11. Ci sono 2010 perle in fila. Viene presa la prima perla e si esclude la successiva. Viene presa la perla ancora successiva e si escludono le due successive a quest'ultima, e così via (come in figura dove vengono prese soltanto le palline senza la croce), finché è possibile.



Quante perle vengono prese?

(A) 65
(B) 64
(C) 63
(D) 62
(E) 61

12. Mario il postino deve fare il giro di 7 fattorie, disposte ai vertici di un esagono regolare, più una al centro. Partendo dalla fattoria di Pablo, che è situata in uno dei vertici dell'esagono, quanti sono i possibili percorsi di lunghezza minima che Mario può seguire per visitare le altre 6? (il percorso termina nell'ultima fattoria visitata, senza tornare nel punto di partenza).

(A) 3
(B) 6
(C) 12
(D) 18
(E) 24

13. Si consideri una “tassellazione” dello spazio costituita da ottaedri regolari (che hanno per facce 8 triangoli equilateri uguali) e tetraedri regolari (che hanno per facce 4 triangoli equilateri uguali): con ciò si intende che gli ottaedri e i tetraedri riempiono lo spazio senza sovrapposizioni o spazi vuoti. Ottaedri e tetraedri sono disposti in modo che ogni faccia triangolare sia comune esattamente a un tetraedro e a un ottaedro. Fissato un vertice P in questa tassellazione, qual è il numero n_O degli ottaedri ed il numero n_T dei tetraedri che hanno P come vertice comune?

(A) $n_O = 6,\ n_T = 8$
(B) $n_O = 4,\ n_T = 4$
(C) $n_O = 4,\ n_T = 8$
(D) $n_O = 6,\ n_T = 6$
(E) $n_O = 8,\ n_T = 8$

14. Si lanciano tre dadi usuali (non truccati). Si punta un euro e si vince se esce almeno un 6. In particolare:

- se esce un 6 si incassano 2 euro (di cui uno è quello puntato)
- se escono due 6 si incassano 3 euro (di cui uno è quello puntato)
- se escono tre 6 si incassano 4 euro (di cui uno è quello puntato)

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(A) Il gioco è vantaggioso
(B) La probabilità di vincere è 1/2
(C) In media si perdono 17/216 euro a giocata
(D) La media della vincita è nulla
(E) In media si perdono 9/216 euro a giocata

15. Un dado da gioco è stato truccato e le varie facce non hanno la stessa probabilità di uscire. Più precisamente, le varie probabilità sono le seguenti:

$$\begin{aligned} \text{prob.}(1) &= \text{prob.}(6) = 1/6 \\ \text{prob.}(2) &= \text{prob.}(5) = 1/8 \\ \text{prob.}(3) &= \text{prob.}(4) = 5/24 \end{aligned}$$

Si lancia il dado tre volte e si vince se la somma S delle facce che “escono” è data da uno dei valori: 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. La probabilità di vincita è:

(A) uguale a 1/2
(B) minore di 1/2
(C) uguale a 112/216
(D) uguale a 121/216
(E) maggiore di 122/216