Roma, 17 marzo 2010

PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA – SEZIONE DI ROMA

GARA INDIVIDUALE

Dipartimenti di Matematica delle Università
Sapienza, Tor Vergata, Roma Tre

con il sostegno di:
Unione Matematica Italiana, Istituto Nazionale di Alta Matematica,
Progetto Lauree Scientifiche, CARFID

Soluzione 1. Scomponendo in fattori le somme di cubi, dalla seconda equazione si ottiene

$$(x+y)(x^2-xy+y^2) = (z+t)(z^2-zt+t^2).$$

Se $x+y=z+t=0$, allora troviamo le soluzioni del tipo $(a,-a,b,-b)$ con a e b numeri reali qualunque. Se invece $x+y=z+t$ è diverso da 0, allora possiamo semplificare, ottenendo

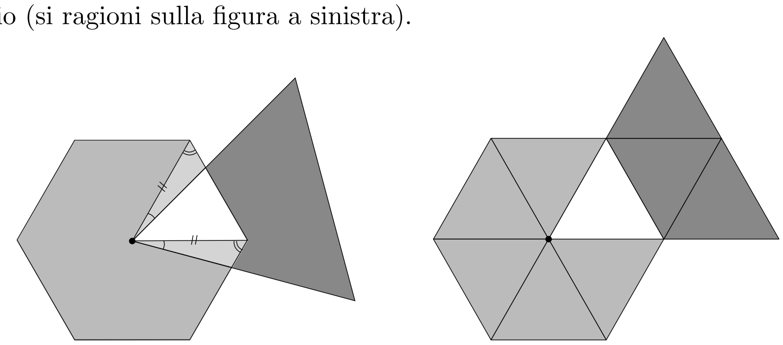
$$x^2-xy+y^2 = z^2-zt+t^2.$$

Tenendo presente che $(x+y)^2=(z+t)^2$, deduciamo che $xy=zt$. Il sistema diventa

$$\begin{cases} x+y=z+t, \\ xy=zt. \end{cases}$$

Visto che ogni coppia di numeri è individuata dalla loro somma s e dal loro prodotto p (basta risolvere l'equazione di secondo grado $x^2-sx+p=0$), l'ultimo sistema ammette tutte e sole le soluzioni del tipo (a,b,a,b) e (a,b,b,a). Le risposte alle tre domande sono tutte affermative.

Soluzione 2. Il valore è unico e corrisponde a $3/5$. La posizione del triangolo equilatero rispetto all'esagono è irrilevante: una rotazione di T intorno al centro di E aggiunge e toglie due triangoli uguali dalla zona di sovrapposizione. L'uguaglianza dei due triangoli si dimostra facilmente con il secondo criterio (si ragioni sulla figura a sinistra).



Conviene quindi collocare le due figure in modo che due lati del triangolo passino per due vertici dell'esagono (figura a destra). L'esagono E è composto da sei triangoli equilateri di lato a, il triangolo T da quattro di essi. Il rapporto tra le parti non sovrapposte è quindi $3/5$.

Soluzione 3. Siano P il punto medio di AB, Q il punto medio di BC, R il punto medio di CD e S il punto medio di DA. Poiché i triangoli ABC e PBQ sono simili, il segmento PQ è parallelo ad AC. Lo stesso ragionamento applicato ai triangoli ADC e SDR mostra che il segmento RS è parallelo ad AC. Dunque i segmenti PQ ed RS sono paralleli e quindi contenuti in un medesimo piano. Si noti che $PQRS$ è un parallelogramma.

Soluzione 4. Calcoliamo la probabilità di formare casualmente un cubo $3 \times 3 \times 3$, a partire da 27 cubetti uguali, con colori assegnati sulle 6 facce (ovviamente, alla fine la disposizione dei colori delle facce del cubo dovrà essere la stessa di quella di un singolo cubetto). Trovata tale probabilità, dovremo moltiplicarla per 24, che rappresenta il numero delle possibili orientazioni, cioè dei diversi modi di appoggiare un cubo su un piano, con una faccia laterale rivolta verso di noi. La faccia di base, infatti, può assumere 6 colori diversi, e scelto il colore della faccia di base, la faccia laterale rivolta verso di noi può assumere 4 colori diversi (il resto è univocamente determinato).

Dividiamo il cubo in 3 strati (superiore, intermedio e inferiore), ciascuno formato da un parallelepipedo $3 \times 3 \times 1$.

La probabilità di formare correttamente lo strato superiore è $(1/24)^8 \cdot (4/24)$. Infatti, gli 8 cubetti "laterali" hanno probabilità $1/24$ (c'è un'unica orientazione su 24 possibili che consente a ciascuno di presentare i 2 o 3 colori assegnati sulle facce del cubo grande), mentre il cubetto centrale ha probabilità $4/24$ (mostrando soltanto la sua faccetta superiore, può subire 4 rotazioni di 90 gradi).

La probabilità che lo strato intermedio si formi correttamente è $(1/24)^4 \cdot (4/24)^4$. Infatti, i cubetti nei vertici dello strato hanno una sola possibile orientazione (probabilità $1/24$), imposta dal dover presentare i colori assegnati su 2 facce del cubo grande; il cubetto al centro, essendo nascosto, può essere collocato con una qualunque orientazione (probabilità 1); i rimanenti cubetti possono subire 4 rotazioni di 90 gradi (probabilità $4/24$), poiché si vede solo una loro faccetta.

Lo strato inferiore ha la stessa probabilità di quello superiore. Moltiplicando tra loro le probabilità dei 3 strati, poi moltiplicando per 24, concludiamo che la probabilità richiesta vale

$$P = \frac{4^6}{24^{25}}.$$

Tale probabilità è piccolissima, infatti

$$P = \frac{4^6}{24^{25}} = \frac{(2^2)^6}{(2^3 \cdot 3)^{25}} = \frac{2^{12}}{2^{75} \cdot 3^{25}} = \frac{1}{2^{63} \cdot 3^{25}}.$$

Dunque, prendendo un cubo a caso, ne troveremo uno "fortunato" una volta su

$$2^{63} \cdot 3^{25} \simeq 7.8148580674821 \cdot 10^{30},$$

quasi ottomila miliardi di miliardi di miliardi. Ci vuole davvero una gran botta... di fortuna!

(Calcolo effettuato sul sito `http://www.wolframalpha.com`, che vi consigliamo di visitare.)

Soluzione 5. C'è una strategia vincente per Beatrice, cioè per il secondo giocatore. È chiaro che se un giocatore lascia un solo gettone, l'avversario è costretto a prenderlo e perde. Vince facilmente anche il giocatore che lascia sul tavolo 4 gettoni: se l'avversario li prende tutti, ha perso, se ne prende uno o due, perde alla mossa successiva. In generale, se un giocatore riesce a lasciare all'avversario $3h + 1$ gettoni, allora vince. Infatti, l'avversario non potrà lasciare a sua volta $3k+1$ gettoni: per ottenere $3k+1$ gettoni, dovrebbe togliere $3(h-k)$ gettoni, ma un multiplo di 3 non è una potenza di 2. Nel nostro caso, partendo da $100 = 3 \cdot 33 + 1$ gettoni, Antonio lascerà sul tavolo un numero di gettoni o del tipo $3h$ (ad esempio se toglie 4 gettoni) oppure del tipo $3h + 2$ (ad esempio se toglie 8 gettoni). A sua volta, Beatrice potrà togliere uno o due gettoni, lasciando ancora all'avversario un numero di gettoni uguale a un multiplo di 3 più uno. Alla fine, Antonio si troverà con un solo gettone, e avrà perso.