PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA - SEZIONE DI ROMA

SOLUZIONI DELLA GARA A SQUADRE 2010

1. La risposta corretta è **(E)**. Dette k e $2k$ le radici dell'equazione, abbiamo $b/a = -3k$ e $c/a = 2k^2$. Se ne deduce $b^2 = \frac{9}{2}ac$. In particolare ne segue $ac \geqslant 0$ e dunque $b^2 = \frac{9}{2}ac \leqslant 5ac$. Le altre risposte sono errate: **(A)** è falsa se le due radici sono, in valore assoluto, minori di 3; **(B)** è falsa se le radici sono positive; **(C)** è falsa se le radici sono negative; **(D)** è falsa ad esempio nel caso in cui le radici siano $\sqrt{2}$ e $2\sqrt{2}$.

2. La risposta corretta è **(C)**. Proviamo a chiederci per quali valori positivi di x_n la formula data accresce il capitale, cioè quando $x_{n+1} > x_n$:

$$1 + (x-1)^{1/3} > x \quad \Leftrightarrow \quad x - 1 > (x-1)^3 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < x - 1 < 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 < x < 2 \; .$$

Quindi solo una somma tra i 1000 e i 2000 euro aumenta di valore. Inoltre in tal caso il capitale rivalutato sarà ancora inferiore ai 2000 euro, perché:

$$1 < x_n < 2 \quad \Rightarrow \quad 0 < (x_n - 1)^{1/3} < 1 \quad \Rightarrow \quad 1 < \; x_{n+1} < 2$$

e quindi in grado di crescere ancora nei mesi successivi. Negli altri casi invece il capitale diminuisce sempre o, come si vede facilmente, resta invariato (se $x = 1$ oppure $x = 2$). Con un ragionamento analogo al precedente si vede che un capitale superiore ai 2000 euro diminuirà senza mai scendere sotto ai 2000 euro. Possiamo allora scartare il valore 999 (perdita costante), il valore 1000 (capitale inalterato) e il valore 2001 (perdita, anche se non superiore ad un euro!). Dei casi rimasti è ora chiaro che con 1999 euro si guadagnerà non più di un euro, mentre con 1001 euro si potrà crescere fino a 2000 euro (e in effetti la successione x_n in tal caso converge velocemente proprio a 2, come dimostra il calcolo dei primi termini: si ha già $x_{10} \simeq 1.999$, e in seguito la crescita riguarda solo le cifre decimali ulteriori).

3. La risposta corretta è **(A)**. Abbiamo a che fare con quattro simmetrie centrali (di centri A, B, C, D). La composizione delle due simmetrie di centri A e B è la traslazione di vettore $2\overrightarrow{AB}$; la composizione delle due simmetrie di centri C e D è la traslazione di vettore $2\overrightarrow{CD}$. La composizione delle due traslazioni ottenute è la traslazione di vettore $2(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD})$. Una traslazione non ha punti uniti a meno che non sia la traslazione banale; dunque L e Q coincidono solo se le due traslazioni sono di vettori uguali in modulo e direzione, ma di verso opposto.

4. La risposta corretta è **(B)**. Infatti, da $x + \frac{1}{x} = \sqrt{7}$ si ricava $\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = 7\sqrt{7}$ e quindi

$$7\sqrt{7} = x^3 + 3x + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3} = \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3\sqrt{7}.$$

Se ne conclude

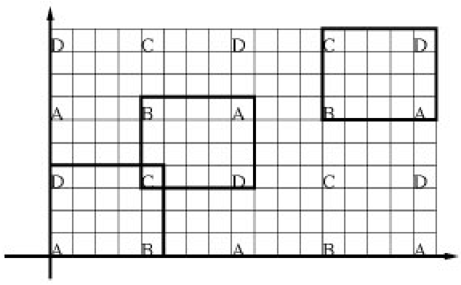
$$x^3 + \frac{1}{x^3} = 4\sqrt{7}$$

5. La risposta corretta è **(B)**. Supponiamo che il lato orizzontale sia lungo m e quello verticale sia lungo n e che m e n siano due numeri naturali maggiori di 1.

Quadrettiamo l'intero piano cartesiano utilizzando le rette parallele agli assi e con ascissa, o ordinata, di valore intero. Indichiamo un quadretto con le coordinate del suo vertice in basso a sinistra.

a) Mettiamo la lettera A su tutti i quadretti che hanno coordinate della forma $((m-1)x, (n-1)y)$ con x e y pari.
b) Mettiamo la lettera B su tutti i quadretti che hanno coordinate della forma $((m-1)x, (n-1)y)$ con x dispari e y pari.
c) Mettiamo la lettera C su tutti i quadretti che hanno coordinate della forma $((m-1)x, (n-1)y)$ con x e y dispari.
d) Mettiamo la lettera D su tutti i quadretti che hanno coordinate della forma $((m-1)x, (n-1)y)$ con x pari e y dispari.

Nel piano abbiamo quindi formato tante scacchiere uguali alla scacchiera originale o alle sue simmetriche rispetto agli assi. Tali scacchiere si sovrappongono l'una con l'altra lungo le caselle dei bordi. Nella figura sono illustrate alcune di queste scacchiere nel caso 5×4.



La nostra passeggiata è equivalente a muoversi in diagonale partendo dal quadretto di coordinate $(0,0)$ percorrendo tutte le caselle della forma (t,t) con t naturale. La passeggiata terminerà al minimo intero positivo t per il quale esistano x e y naturali tali che $t=(m-1)x$ e $t=(n-1)y$. Ovvero t sarà il minimo comune multiplo di $m-1$ e $n-1$ e la casella in cui terminerà la passeggiata sarà determinata dalla parità di x e y. Nel caso in questione $m-1=208=2\cdot 104$ e $n-1=206=$ $=2\cdot 103$, e cerchiamo i minimi x ed y naturali positivi per i quali si abbia $2\cdot 104\cdot x=2\cdot 103\cdot y$. Si ha, chiaramente, $x=103$ e $y=104$, e la passeggiata terminerà nella casella B.

6. La risposta corretta è **(D)**. Supponiamo per semplicità che la piastrella nell'angolo in basso a sinistra sia bianca. Allora dovrà esserci un quadrato 2×2 di mattonelle bianche nell'angolo in basso a sinistra. Andando a studiare le possibili configurazioni di mattonelle che confinano con questo quadrato, ci si convince facilmente che le uniche due possibilità sono che l'angolo in basso a sinistra appartenga a una fascia orizzontale di $7\times k_1$ mattonelle bianche (dove k_1 è un numero naturale compreso tra 2 e 7), o ad una fascia verticale di $k_1\times 7$ mattonelle bianche. Nel primo caso, questa fascia sarà seguita da una seconda fascia orizzontale di $7\times k_2$ mattonelle nere, poi da una fascia di $7\times k_3$ mattonelle bianche, e così via; analogamente, nel secondo caso, la stanza sarà suddivisa in fasce verticali di mattonelle alternativamente bianche e nere, ognuna di ampiezza almeno 2. La somma di queste ampiezze dovrà dare l'ampiezza complessiva della stanza, che è 7. Dobbiamo quindi calcolare il numero di modi in cui possiamo scrivere 7 come somma di numeri maggiori o uguali a 2. Le uniche possibilità sono

$$
\begin{aligned}
&7=3+2+2=2+3+2=2+2+3\\
&7=5+2=2+5\\
&7=4+3=3+4
\end{aligned}
$$

Ognuna di queste possibilità dà origine a 2 diversi piastrellamenti a strisce orizzontali, a seconda che la mattonella nell'angolo in basso a sinistra sia bianca o nera, e a 2 diversi piastrellamenti a strisce verticali. Otteniamo quindi $2\cdot 2\cdot 7$ possibili piastrellamenti a strisce. Infine possiamo piastrellare la stanza anche tutta bianca o tutta nera. Quindi in tutto otteniamo 30 possibilità.

7. La risposta corretta è **(E)**. Fra le prime due affermazioni, una è vera e l'altra è falsa; dunque X ed Y sono di tipo diverso. Pertanto X ha torto (è un furfante) mentre Y è un cavaliere. Se Z è un cavaliere, allora indica Y. Ma anche nel caso in cui sia un furfante, Z indica ancora Y, in modo che la sua affermazione sia falsa. In conclusione, non sappiamo se Z sia un cavaliere o un furfante, ma di certo ha indicato Y.

8. La risposta corretta è **(D)**. Dette x,y,z le tre percentuali iniziali, abbiamo $x+y+z=100$ (con x,y,z maggiori o uguali a 0) e anche $2x+\frac{2}{3}y+\frac{3}{4}z=100$. Le soluzioni del sistema

$$
\begin{cases}
x+y+z=100\\[2ex]
2x+\dfrac{2}{3}y+\dfrac{3}{4}z=100
\end{cases}
\qquad \text{sono date da} \qquad
\begin{cases}
x=t\\
y=-300+15\,t\\
z=400-16\,t
\end{cases}
$$

con t parametro reale. Imponendo le condizioni $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$ e $z\geqslant 0$ si ricava $20\leqslant t\leqslant 25$ e dunque $20\leqslant x\leqslant 25$. Ragionando in modo analogo, si trova che y è compresa fra 0 e 75, mentre z è compresa fra 0 e 80.

9. La risposta corretta è **(C)**. Siano $a-d$, a e $a+d$ i tre lati. Detto r il raggio della circonferenza inscritta, detta h l'altezza relativa al lato intermedio, ed indicata con A l'area del triangolo, si ha:

$$a\,h = 2A = r(a-d) + r\,a + r(a+d) = 3\,ra,$$

da cui si ricava $r = \frac{1}{3}h$. Dal momento che il baricentro si trova ad 1/3 della mediana (relativa al lato intermedio), per il teorema di Talete la parallela al lato intermedio passante per il baricentro individua sull'altezza h un segmento di lunghezza uguale ad r. Ma l'incentro ha distanza r dai lati, e quindi appartiene a questa retta. L'esempio del triangolo equilatero mostra che **(A)**, **(B)** ed **(E)** sono scorrette; l'esempio del triangolo rettangolo con i lati di lunghezza 3, 4 e 5 mostra che anche **(D)** è scorretta.

10. La risposta corretta è **(B)**. Si consideri un sistema di coordinate con origine O nel punto di intersezione delle quattro lastre, ed assi x, y, z perpendicolari e disposti rispettivamente all'intersezione dei piani 3 e 4, dei piani 2 e 3, e dei piani 1 e 2. Ogni punto (x, y, z) della barchetta viene trasformato dalla prima riflessione nel punto $(x, -y, z)$; quindi dalla seconda riflessione nel punto $(-x, -y, z)$; poi dalla terza nel punto $(-x, -y, -z)$; infine, dalla quarta, nel punto $(-x, y, -z)$. Pertanto la composizione delle quattro riflessioni lascia la coordinata y di ogni punto invariata e cambia di segno alle coordinate x, z: è dunque la rotazione di 180° rispetto all'asse delle y.

11. La risposta corretta è **(D)**. Se sono state prese n perle, alla sinistra dell'ultima perla presa ne sono state escluse

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) = \frac{(n-1)n}{2}.$$

Complessivamente, fino a quel punto, le perle sono dunque

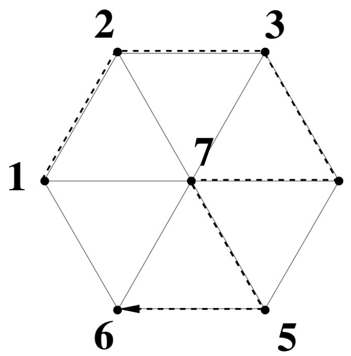
$$n + \frac{(n-1)n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Questo numero deve essere il più grande possibile senza superare 2010. Si ha

$$\frac{62 \cdot 63}{2} = 1953; \qquad \frac{63 \cdot 64}{2} = 2016,$$

quindi $n = 62$.

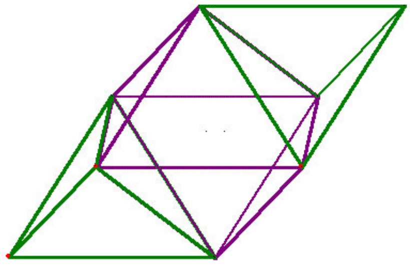
12. La risposta corretta è **(D)**. Il percorso conta almeno 6 passi, ognuno dei quali di lunghezza almeno pari al lato L dell'esagono. Quindi un percorso minimo ha lunghezza almeno $6L$. Poiché esistono percorsi che passano per tutte e sette le fattorie e che sono costituiti esattamente da 6 passi di lunghezza L, ne segue che questi sono tutti e soli i percorsi di lunghezza minima. Numeriamo da 1 a 6 i vertici dell'esagono (in senso orario) e chiamiamo 7 il suo centro, come in figura.



I percorsi minimi distinti sono 18. Infatti:

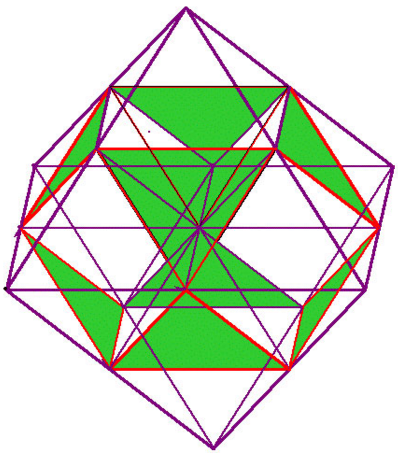
- hanno 7 al secondo posto i cammini 1723456 e 1765432;
- hanno 7 al terzo posto i cammini 1273456, 1276543, 1672345 e 1675432;
- hanno 7 al quarto posto i cammini 1237456, 1237654, 1657234 e 1657432;
- hanno 7 al quinto posto i cammini 1234756, 1234765, 1654723 e 1654732;
- hanno 7 al sesto posto i cammini 1234576 e 1654372;
- hanno 7 al settimo posto i cammini 1234567 e 1654327.

13. La risposta corretta è **(A)**. La tassellazione dello spazio con ottaedri e tetraedri si ottiene come segue: ogni parallelepipedo tassella lo spazio, ed il parallelepipedo con facce rombiche con angoli di 60° si divide in due tetraedri e un ottaedro come in figura.



Accostando uno all'altro più parallelepipedi, ciascuno scomposto nel modo descritto, si ottiene la tassellazione dello spazio di cui si parla. Un vertice P della tassellazione è comune a 8 parallelepipedi, nei quali P assume le 8 possibili diverse posizioni (in alto dietro a sinistra, in alto davanti a destra, ecc.). Si tratta, pertanto, di vedere quanti tetraedri e quanti ottaedri concorrono in ciascuno degli 8 vertici del parallelepipedo in figura: 2 di essi sono vertici solo di 1 tetraedro, mentre gli altri 6 sono vertici di un tetraedro e di un ottaedro. In totale, abbiamo così 2+6 tetraedri e 6 ottaedri.

Nella seconda figura si cerca di visualizzare un vertice della tassellazione completamente "circondato" da ottaedri e tetraedri. La situazione che si presenta è la seguente: 6 ottaedri e 8 tetraedri di spigolo 1 concorrono in un vertice a formare un ottaedro di spigolo 2 (che ha i 6 ottaedri nei vertici e gli 8 tetraedri al centro delle facce).



14. La risposta corretta è **(C)**. Indicando con p la probabilità di un evento, risulta:

$p(\text{un solo } 6) = 3 \cdot \dfrac{1 \cdot 5 \cdot 5}{6 \cdot 6 \cdot 6} = \dfrac{75}{216}$

(dove compare un fattore 3 perché il 6 può comparire nel primo, nel secondo o nel terzo dado)

$p(\text{due } 6 \text{ soltanto}) = 3 \cdot \dfrac{1 \cdot 1 \cdot 5}{6 \cdot 6 \cdot 6} = \dfrac{15}{216}$

(dove compare un fattore 3 perché il dado senza il 6 può essere il primo, il secondo o il terzo)

$p(\text{tre } 6) = \dfrac{1 \cdot 1 \cdot 1}{6 \cdot 6 \cdot 6} = \dfrac{1}{216}$.

In ogni giocata da un euro si incassano in media:

$$2 \cdot \frac{75}{216} + 3 \cdot \frac{15}{216} + 4 \cdot \frac{1}{216} = \frac{199}{216}$$

euro, perdendo in media 17/216 euro a giocata.

15. La risposta corretta è **(A)**. Risulta prob.(h) = prob.$(7-h)$; quindi la probabilità di ottenere somma S lanciando tre volte il dado è uguale alla probabilità di ottenere come somma $21-S$, per ogni $S = 3, 4, \ldots, 18$. Ne segue che la probabilità che S appartenga all'insieme $\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ è uguale alla probabilità che S appartenga all'insieme $\{11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18\}$. Dunque la probabilità di vittoria è esattamente 1/2.