Roma, 23 marzo 2011

PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA – SEZIONE DI ROMA

GARA INDIVIDUALE

Dipartimenti di Matematica delle Università
Sapienza, Tor Vergata, Roma Tre

con il sostegno di:
Unione Matematica Italiana, Istituto Nazionale di Alta Matematica,
Progetto Lauree Scientifiche, CARFID

Quesito 1. Si consideri la successione definita per ricorrenza

$$x_{n+1} = \frac{1}{2 - x_n}, \qquad x_0 = \alpha \ .$$

Determinare la forma di tutti i valori iniziali α per i quali la successione non rimane definita per ogni n.

oppure:

Dimostrare che esiste una successione di numeri reali distinti $\{z_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$, tale che la successione precedente non rimane definita per ogni n se e solo se $\alpha = z_k$ per qualche k.

Quesito 2. Pierino ha trovato una pepita convessa da $1\,dm^3$ di volume e $11\,cm$ di diametro[1]. Decide di tagliarla in tante sottili fettine parallele e metterle nel suo salvadanaio. La fessura rettangolare del salvadanaio (infinitamente capiente) è lunga $8\,cm$ e larga $2\,mm$. Riuscirà Pierino a infilarcele?

Nota: Pierino può solo lasciar *cadere* ciascuna fettina nel salvadanaio, nella direzione che preferisce (p.es non può piegare le fettine e neppure ruotarle una volta attraversata in parte la fessura).

Quesito 3. Un *grafo* è una figura (non necessariamente piana) G costituita da un insieme di punti v_i (detti *vertici*) ed un insieme di linee l_j (detti *archi*), che uniscono alcuni dei vertici tra loro. Il *grado* di un grafo G è il massimo numero di archi uscenti da uno stesso vertice. La *distanza* tra due vertici v_1, v_2 di G è il minimo numero di archi che è necessario percorrere per andare da v_1 a v_2 (la distanza è infinita se non è possibile andare da v_1 a v_2). Il *diametro* di G è la più grande distanza possibile tra due vertici del grafo.
Qual è il più piccolo grado possibile per un grafo con 9 vertici e di diametro 2?

Quesito 4. Determinare tutte le quaterne di numeri interi a, b, c, d, tali che

$$a^2 + b^2 + c^2 = 7d^2.$$

Quesito 5. Data una circonferenza di diametro AB e un generico punto C su di essa, indichiamo con r la retta tangente in C alla circonferenza, come in fig. 1.

Dimostrare che gli angoli $B\hat{A}C$ e $A\hat{C}F$ sono complementari, ovvero la loro somma è pari ad un angolo retto.

[1] cioè la distanza massima tra due punti della pepita è $11\,cm$.

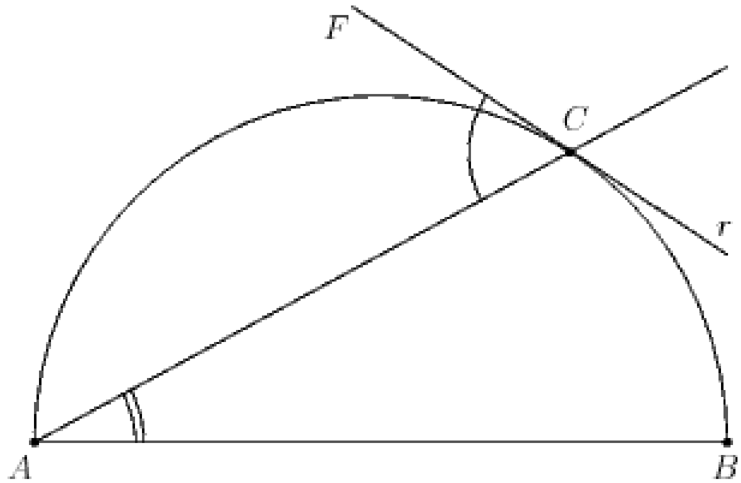

fig. 1

Riferiamoci ora alla fig. 3. Data una circonferenza di diametro AB e un generico punto C su di essa, indichiamo con r la retta tangente in C alla circonferenza. Sia t la retta tangente in B alla circonferenza (che risulterà perpendicolare al diametro AB) e D il punto d'intersezione fra le rette tangenti r e t. Se da C conduciamo il segmento CH perpendicolare al diametro AB, dimostrare allora che il punto M di intersezione fra il segmento AD e il segmento CH divide in due parti uguali il segmento CH.

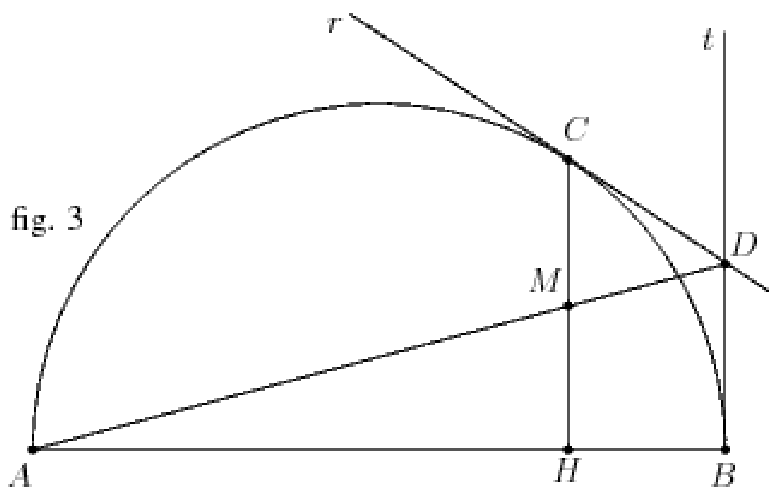

fig. 3