Roma, 21 marzo 2011

PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA – SEZIONE DI ROMA

GARA A SQUADRE

Dipartimenti di Matematica delle Università
Sapienza, Tor Vergata, Roma Tre

con il sostegno di:
Unione Matematica Italiana, Istituto Nazionale di Alta Matematica,
Progetto Lauree Scientifiche, CARFID

Quesito 1. Durante il suo spettacolo teatrale, il mago Flip estrae dalla tasca il portafoglio e, rivolgendosi ad uno spettatore dice: "sento con i miei poteri che in questo portafoglio c'è lo stesso numero di banconote che nel tuo, anzi mi correggo, qui ce ne sono 3 di più. No, fermi! Il mio spirito guida dice che qui ci sono le stesse che nel tuo, più altre 3, più quelle che mancano alle tue per arrivare a 20 banconote". Dopo aver verificato che lo spirito guida del mago aveva ragione, dal teatro parte una standing ovation. Quante banconote aveva il mago nel portafoglio?

(a) 17
(b) 20
(c) 23
(d) 30
(e) Non è possibile stabilirlo

Quesito 2. Una piramide regolare a base quadrata viene sezionata con un piano. La sezione risultante può essere:

(a) un triangolo oppure un quadrato
(b) un triangolo, o un quadrilatero, o un pentagono
(c) un triangolo, o un quadrilatero, o un pentagono, o un esagono
(d) un trapezio isoscele, o un quadrato, o un triangolo
(e) un quadrilatero, un triangolo equilatero o un triangolo isoscele

Quesito 3. Un perfetto Bloody Mary è fatto con 7 cl di succo di pomodoro, con densità (kg/L) di 1.05, e 3 cl di vodka. Il nostro barman ha a disposizione 20 barattoli di succo di pomodoro da 10 once ciascuno, della giusta densità, e 5 pinte di vodka; quanti Bloody Mary perfetti potrà preparare?

Nota: si ricorda che 1 oncia $= 28.35$ gr e 1 pinta $= 470,4$ mL.

(a) 76
(b) 77
(c) 78
(d) 81
(e) nessuna delle precedenti

Quesito 4. Su un triangolo equilatero di lato 11, viene marcato un punto su ciascun lato, a distanza x dal vertice che lo segue in senso orario. La congiungente due di tali punti taglia via un triangolo di perimetro 18. Quanto vale x?

(a) 1 oppure 10
(b) 2 oppure 9
(c) 3 oppure 8
(d) 4 oppure 7
(e) 5 oppure 6

Quesito 5. Le funzioni $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tali che $f(x^2 + y) = x^2 + f(y)$ per ogni $x, y \in \mathbb{N}$ e che soddisfano $f(100) \leq 1000$:

(a) non esistono
(b) ne esiste solo una
(c) sono esattamente 10
(d) sono esattamente 901
(e) sono infinite

Quesito 6. Sia $p(x)$ il polinomio

$$p(x) = -\frac{1}{6}\left(x^3 - 9x^2 + 20x - 18\right).$$

Si definisca la successione x_n come $x_0 = 4$ e $x_{n+1} = p(x_n)$. Il valore di x_{1000} è:

(a) -996
(b) -2
(c) 1
(d) 4
(e) 2011

Quesito 7. Marina fa da baby-sitter a 5 gemellini dispettosi che, quando litigano tra loro, mentono o dicono la verità, facendo sempre il contrario di quello che ha parlato prima. Marina assiste alla seguente azzuffata:

Andrea: “Hanno rubato il trenino a Danilo!”

Bettino: “Io non ho rubato niente! Corrado è un ladro!”

Corrado: “Sei un bugiardo! È Andrea che è un ladro!”

Danilo: “Il trenino è di Ettore! E a me hanno rubato la palla!”

Ettore: “È stato Andrea a rubare la palla, e Corrado il trenino!”

Sapendo che sicuramente due di essi hanno rubato palla e trenino ad altri due, che nessuno dei leggittimi proprietari ha rubato nulla, e che tutti i gemellini sanno bene come sono andate le cose, Marina può stabilire:

(a) che Bettino ha rubato qualcosa
(b) che Corrado ha rubato il trenino
(c) chi siano i ladri, ma non a chi appartenga la palla e a chi il trenino
(d) a chi appartenga la palla, a chi il trenino, ma non chi abbia rubato cosa
(e) nessuna delle precedenti

Quesito 8. Due punti situati rispettivamente sugli spigoli all'inizio e alla fine di un muro rettangolare lungo 8 metri e alto 3 metri debbono essere connessi con un cavo che risulti fissato, in qualche punto, sia al bordo inferiore che a quello superiore del muro stesso. Se il punto iniziale I si trova a 60 centimetri da terra e il punto finale F si trova a 2,70 metri da terra, quale sarà la lunghezza minima del cavo?

(a) 8,9 metri
(b) 9 metri
(c) 8,8 metri
(d) 11,3 metri
(e) nessuna delle precedenti

Quesito 9. Sia a_n la successione definita da $a_1 = 3$, $a_{n+1} = 3^{a_n} + 1$. Determinare l'insieme dei numeri compresi tra 0 e 9 che compaiono come ultima cifra decimale di a_n per infiniti valori di n.

(a) $\{2, 8\}$
(b) $\{0, 2\}$
(c) $\{0\}$
(d) $\{2\}$
(e) $\{0, 8\}$

Quesito 10. Nel piano euclideo, sia P un quadrato di lato 2. Quanti sono i quadrati Q nel piano con le seguenti proprietà:

(1) Q ha lato 1,
(2) Q contiene un vertice di P,
(3) P interseca il perimetro di Q in una poligonale di lunghezza 1,
(4) P interseca Q in una regione di area $1/4$.

(a) 4
(b) 8
(c) 12
(d) 24
(e) infiniti

Quesito 11. Si vogliono colorare i vertici di un n-agono regolare avendo a disposizione i tre colori bianco, rosso e verde, e in modo che due vertici consecutivi siano sempre di colore diverso. Nel caso di un triangolo, ad esempio, ci sono 6 colorazioni possibili. Quante colorazioni sono possibili nel caso di un esagono?

(a) 30
(b) 36
(c) 42
(d) 60
(e) 66

Quesito 12. Nello spazio sono date due rette r, s non complanari, che formano un angolo di 20 gradi (si tratta dell'angolo che r forma con una retta parallela ad s e passante per un suo punto qualunque). I punti della retta r vengono fatti ruotare attorno ad s descrivendo una superficie $\mathcal{R}$. Siano P il punto della retta r che dista meno da s, H il piede della perpendicolare condotta da P ad s e π il piano per P perpendicolare a PH. Qual è l'intersezione del piano π con la superficie di rotazione $\mathcal{R}$?

(a) La retta r
(b) il punto P
(c) una semiretta di r uscente da P
(d) l'unione della retta r e una parabola di vertice P
(e) nessuna delle precedenti

Quesito 13. La nuovissima città di Mategrado, progettata dal famoso matematico Pico Delle Carte, ha la forma di un quadrato di 1 km di lato. Le sue strade, perfettamente rettilinee, formano una griglia di lato 100 metri, come descritto in Figura 1. Paolino Dei Foglietti, brillante studente del professor Delle Carte, dopo la discussione della tesi di laurea si lascia andare e si ritrova un po' sbronzo nell'angolo sud-ovest della città (punto P in figura). Per tornare a casa, situata nell'angolo diametralmente opposto della città (punto C), il povero Paolino procede dirigendosi sempre verso nord o verso est, e agli incroci, nel caso si presenti il dubbio, lancia una monetina per decidere quale tra le due direzioni imboccare. Lo sventurato spera di non farsi vedere in queste condizioni pietose né dal professor Delle Carte, come sempre a studiare nel suo ufficio presso il Dipartimento di Matematica situato all'incrocio al centro della città (punto M in figura), né dalla fidanzata Flora, che è a casa sua situata nell'angolo opposto dell'isolato in cui si trova ora Paolino (punto F in figura).

Con che probabilità Paolino raggiungerà casa sua senza farsi vedere?

(a) 193/512
(b) 25/64
(c) 1/2
(d) 517/1024
(e) nessuna delle precedenti

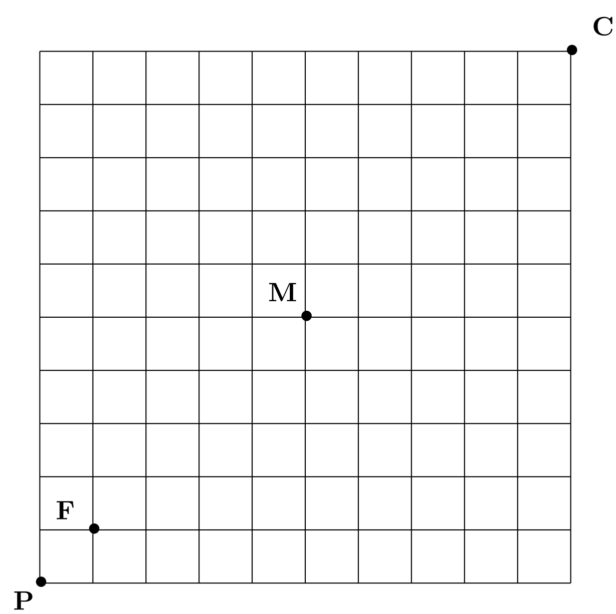

FIGURA 1. Pianta della città di Mategrado

Quesito 14. Nella successione dei numeri primi in ordine crescente

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, \ldots$$

i numeri 1861 e 2011 si trovano rispettivamente alle posizioni 284 e 305. Sia N il più grande numero intero con la proprietà che preso comunque un insieme S di 150 numeri interi compresi tra 2 e 2011, a due a due senza fattori comuni, S contiene almeno N numeri primi. Quanto vale N?

(a) 0
(b) 17
(c) 34
(d) 68
(e) 136

Quesito 15. Sul terreno di un campetto rettangolare di metri 40×45 si vogliono delimitare due regioni circolari prive di punti interni comuni. In quanti casi la lunghezza complessiva delle due circonferenze al bordo assume valore massimo?

(a) 1
(b) 2
(c) 4
(d) 8
(e) infiniti

Quesito 16. Masetto e Zerlina si sono fidanzati il k-esimo giorno del mese di aprile davanti al dipartimento di matematica dopo avere inventato insieme un gioco aritmetico. Tutti gli anni in occasione del loro anniversario si cimentano nel gioco che fu per loro galeotto. Il gioco funziona nel seguente modo. Partono dal numero N che esprime l'anno solare in corso. Inizia Zerlina che sottrae un numero inferiore o uguale a N che sia una potenza di k (ovvero k^i con i maggiore o uguale a 0, ricordiamo che $k^0 = 1$). Il risultato $M = N - k^i$ passa a Masetto che a sua volta sottrae un numero inferiore o uguale a M che sia una potenza di k. Il gioco continua con le stesse regole e vince chi ottiene come risultato della propria sottrazione il numero 0.

Sapendo che nel 2011 vincerà Masetto e che nell'anno di fidanzamento ha vinto Zerlina, in che giorno i due piccioncini si sono fidanzati?

(a) 2 aprile 1984.
(b) 3 aprile 1981.
(c) 4 aprile 1985.
(d) 6 aprile 1987.
(e) 8 aprile 1980.