Roma, 23 marzo 2011

PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA – SEZIONE DI ROMA

GARA INDIVIDUALE

Dipartimenti di Matematica delle Università
Sapienza, Tor Vergata, Roma Tre

Con il sostegno di: Unione Matematica Italiana, Istituto Nazionale di Alta Matematica, Progetto Lauree Scientifiche, CARFID.

SOLUZIONI

Quesito 1. $z_k = (k+1)/k, \quad k = 1, 2, \ldots$

Dobbiamo escludere che la successione finisca dopo un numero finito di passi proprio nel valore 2, perché a quel punto si arresterà in quanto non più definita. Come facciamo a determinare i valori iniziali per cui questo accade? Lavoriamo come i gamberi, procedendo a ritroso. Ovviamente il primo valore da escludere è proprio $z_1 = 2$. Poi ci chiediamo qual è il valore che viene mandato in 2, quale valore viene mandato in quello che viene mandato in 2 ecc.:

$$2 = 1/(2 - z_2) \Rightarrow z_2 = 3/2; \quad 3/2 = 1/(2 - z_3) \Rightarrow z_3 = 4/3; \quad \ldots$$

A questo punto ci nasce il sospetto che la forma generale sia $z_k = \frac{k+1}{k}$. Infatti per ogni k:

$$f\left(\frac{k+1}{k}\right) = \frac{1}{2 - \frac{k+1}{k}} = \frac{k}{k-1},$$

e in $(k-1)$ passi la successione arriva proprio in 2.

Quesito 2. Sia P la pepita. Comunque Pierino tagli a fette per piani paralleli la pepita, esisterà una sezione S di area superiore o uguale ad $s = vol(P)/diam(P) = 90.\overline{90}\, cm^2$; altrimenti, il volume totale risulterebbe inferiore ad $s \cdot 11\, cm^2 = vol(P)$. Per la stessa ragione, comunque si lasci cadere S attraverso la fessura (ovvero si sezioni ulteriormente S parallelamente a una direzione) esisterà sempre una sezione di S di lunghezza superiore o uguale a

$$l = area(F)/diam(F) \geq \frac{a}{11} = \frac{90.\overline{90}}{11} > 8 + \frac{2.9}{11} > 8.2\, cm.$$

Poiché il diametro della fessura è inferiore a $\sqrt{8^2 + 0.2^2} < 8.2$ cm, è chiaro che ci sarà sempre una fettina che non potrà passare per la fessura.

Quesito 3. Il più piccolo grado è 4.

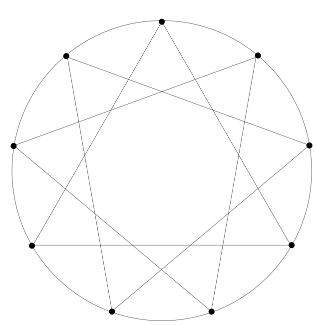


FIGURA 1. Un grafo con 9 vertici, diametro 2 e grado 4.

Mostriamo che se un grafo G ha 9 vertici e grado inferiore a 4, allora il suo diametro è superiore a 2. Possiamo limitarci a mostrarlo nel caso di un grafo G che non abbia archi che partono e arrivano nello stesso vertice (dei "cappi"): altrimenti, cancellando tali archi, otterremo un grafo G' senza cappi, con ugual numero di vertici, grado ancora inferiore a 4, e stesso diametro. Sia allora G un grafo senza cappi con 9 vertici e grado inferiore a 4: il numero totale di spigoli è $L \leq \frac{3 \cdot 9}{2} = 13.5$ (poiché ogni lato congiunge due vertici distinti); dunque $L \leq 13$ ed esiste almeno un vertice v da cui partono al più due archi. Se da v non parte alcun arco, v è isolato ed il diametro di G è infinito. Se da v partissero uno o due archi verso vertici v', v'', i rimanenti $9 - 3 = 6$ vertici del grafo dovrebbero essere tutti collegati da qualche arco a v' oppure a v'', affinché il diametro sia 2; dunque da uno tra v' e v'' uscirebbero almeno 4 archi, e il grado di G sarebbe almeno 4.

Quesito 4. L'unica soluzione è quella banale $a = b = c = d = 0$. Infatti, data una soluzione non banale a, b, c, d, a meno di dividere per il massimo comune divisore possiamo supporre che a, b, c e d non siano tutti pari. Notiamo che ogni quadrato dispari è della forma $8k + 1$, mentre ogni quadrato pari è della forma $8k$ oppure $8k + 4$.

Se d è pari allora esattamente due tra a, b e c sono dispari e quindi $a^2 + b^2 + c^2$ è del tipo $8k + 2$ oppure $8k + 6$, mentre $7d^2$ è del tipo $8k$ oppure $8k + 4$. Se d è dispari allora $7d^2$ è del tipo $8k + 7$ mentre $a^2 + b^2 + c^2$ è del tipo $8k + 3$ oppure $8k + 1$ oppure $8k + 5$.

Quesito 5. Con riferimento alla fig. 2, congiungiamo il punto C con il centro O della circonferenza e consideriamo il triangolo AOC.

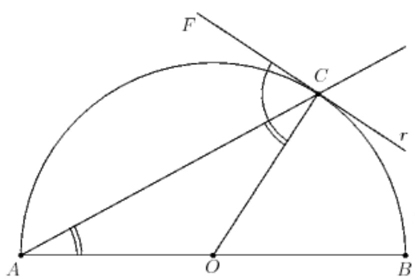
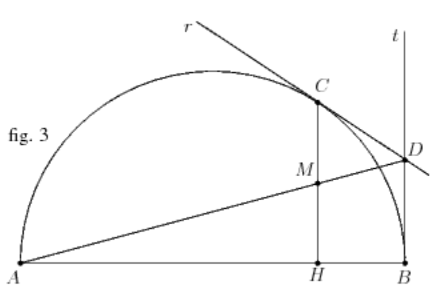


fig. 2

Il triangolo AOC risulta essere isoscele perché il due lati OA e OC sono uguali in quanto raggi della circonferenza. Allora anche i due angoli, detti *angoli alla base*, $O\hat{A}C$ e $A\hat{C}O$ risultano uguali e dunque la somma $O\hat{A}C + A\hat{C}F$ equivale alla somma $A\hat{C}O + A\hat{C}F$. Ma la somma $A\hat{C}O + A\hat{C}F$ è un angolo retto perché, per una proprietà della retta tangente ad una circonferenza, il raggio OC è perpendicolare alla retta tangente r. Quindi anche la somma $O\hat{A}C + A\hat{C}F$ è pari ad un angolo retto, come volevamo dimostrare.

fig. 3


Riferendoci alla fig. 3, data una circonferenza di diametro AB e un generico punto C su di essa, indichiamo con r la retta tangente in C alla circonferenza. Sia t la retta tangente in B alla circonferenza (che risulterà perpendicolare al diametro AB) e D il punto d'intersezione fra le rette tangenti r e t. Se da C conduciamo il segmento CH perpendicolare al diametro AB, allora il punto M di intersezione fra il segmento AD e il segmento CH divide in due parti uguali il segmento CH.

Con riferimento alla figura 4, sia E il punto d'intersezione della retta t con la retta passante per i punti A e C.

I due triangoli rettangoli AMH e ADB risultano simili perché hanno l'angolo $H\hat{A}M$ in comune e allora possiamo scrivere la proporzione fra due coppie di lati omologhi (corrispondenti)

$$AH : AB = MH : DB \tag{1a}$$

Anche i due triangoli rettangoli ACH e AEB risultano simili perché hanno l'angolo $H\hat{A}C$ in comune e allora possiamo scrivere la proporzione fra due coppie di lati omologhi (corrispondenti)

$$AH : AB = CH : EB \tag{1b}$$

Poiché i primi membri nelle due proporzioni (1a) e (1b) sono uguali, risultano uguali anche i secondi membri, ovvero abbiamo la proporzione

$$MH : DB = CH : EB$$

la quale, attraverso lo scambio dei medi, può essere riscritta nella forma

$$MH : CH = DB : EB \tag{2}$$

Dalla proporzione (2) segue che M risulta punto medio del segmento CH se D è punto medio del segmento EB. Per dimostrare che M è il punto medio del segmento CH basta quindi dimostrare che D è punto medio del segmento EB, ovvero che i due segmenti ED e DB risultano uguali. Poiché i due segmenti DC e DB sono segmenti di tengenza giacenti sulle rette tangenti uscenti da D, segue che essi sono uguali e quindi per dimostrare l'uguaglianza fra i segmenti ED e DB basta dimostrare l'uguaglianza fra i segmenti ED e DC, ovvero l'uguaglianza fra i due angoli $D\hat{E}C$ e $D\hat{C}E$. Poiché i due angoli $D\hat{C}E$ e $A\hat{C}F$ sono uguali in quanto *opposti al vertice*, allora per dimostrare l'uguaglianza fra i due angoli $D\hat{E}C$ e $D\hat{C}E$ basta dimostrare l'uguaglianza fra i due angoli $D\hat{E}C$ e $A\hat{C}F$.

Poiché la somma dei due angoli acuti di un triangolo rettangolo è un angolo retto, segue che nel triangolo rettangolo BAE la somma dei due angoli acuti $D\hat{E}C$ e $H\hat{A}C$ è un angolo retto. Poiché per la proprietà dimostrata all'inizio, anche la somma dei due angoli $A\hat{C}F$ e $H\hat{A}C$ è un angolo retto, allora dal confronto fra le due uguaglianze

$$D\hat{E}C + H\hat{A}C = 90 \qquad \text{e} \qquad A\hat{C}F + H\hat{A}C = 90$$

concludiamo che i due angoli $D\hat{E}C$ e $A\hat{C}F$ risultano uguali, ovvero che M è punto medio del segmento CH, come volevamo dimostrare.

fig. 4