Roma, 21 marzo 2011

PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA – SEZIONE DI ROMA

GARA A SQUADRE

Dipartimenti di Matematica delle Università
Sapienza, Tor Vergata, Roma Tre

con il sostegno di:
Unione Matematica Italiana, Istituto Nazionale di Alta Matematica,
Progetto Lauree Scientifiche, CARFID

SOLUZIONI[1]

Quesito 1. Risposta (c). Siano x, y il numero di banconote da 10 euro nei portafogli del mago e dello spettatore rispettivamente. Allora x e y soddisfano l'equazione

$$x = y + 3 + (20 - y) = 23.$$

Quesito 2. Risposta (b). Le altre risposte sono, infatti, errate o incomplete perché:

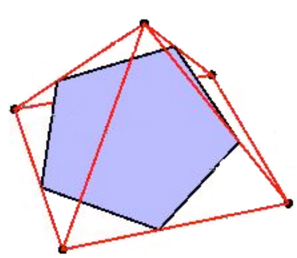
(a) la sezione può essere un triangolo oppure un quadrato, ma anche un trapezio.

(c) la sezione non può essere un esagono, perché non ci sono 6 facce nella piramide; in particolare, nessun piano interseca 6 facce.

(d) queste sezioni sono tutte possibili, ma sono possibili anche un pentagono ed un trapezio.

(e) non solo sono possibili anche pentagoni, ma anche i triangoli possono non avere simmetrie.

Quindi l'unica restrizione è sul numero di lati della figura risultante. Ne sono possibili fino a 5, ad esempio:



Quesito 3. Risposta (b). I 20 barattoli di succo di pomodoro da 10 once, con densità 1.05, corrispondono a $\frac{20 \cdot 10 \cdot 28.35}{10^3 \cdot 1.05}$ L = 540 cL. Le 5 pinte di vodka corrispondono a $5 \cdot 470.4$ ml = 235.2 cL. Poiché $540/235.2 < 7/3$, si ha a disposizione più vodka che succo di pomodoro. Il massimo numero di dosi di pomodoro utilizzabili è dunque $[540/7] = 77$, corrispondenti a $3 \cdot 77 = 231$ cL di vodka. La risposta giusta è quindi la (b).

[1] Il presente file può essere scaricato dalla pagina web `www.mat.uniroma1.it/didattica/olimpiadi/`

Quesito 4. Risposta (c). Due dei lati del triangolo sono lunghi x e $11-x$; essendo il perimetro 18, il terzo lato è lungo 7. Il triangolo equilatero si spezza quindi in un triangolo equilatero di lato 7 e tre triangoli identici di lati $x, 11-x, 7$. Si noti che l'angolo tra i lati lunghi x e $11-x$ è di sessanta gradi. Confrontando le aree, x deve soddisfare

$$3\frac{1}{2}x(11-x)\sin 60 + \frac{1}{2}7^2 \sin 60 = \frac{1}{2}11^2 \sin 60$$

cioè $3x(11-x)+49 = 121$. Sviluppando, si ottiene $x^2 - 11x + 24 = 0$, da cui $x = 3, 8$.

Quesito 5. Risposta (d). Ponendo $x = 1$, si ottiene $f(y+1) = f(y)+1$, e quindi $f(n) = n + f(0)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, che soddisfa l'equazione funzionale data per ogni scelta di $f(0)$. Allora $0 \leq f(0) \leq 900$ permette 901 scelte differenti.

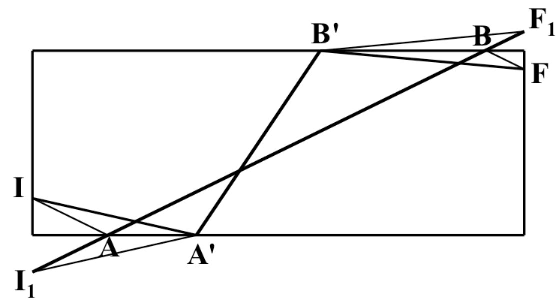
Quesito 6. Risposta (c). Calcoliamo i primi termini della successione x_n. Si ha:

$$x_0 = 4; \qquad x_1 = 3; \qquad x_2 = 2; \qquad x_3 = 1; \qquad x_4 = 1.$$

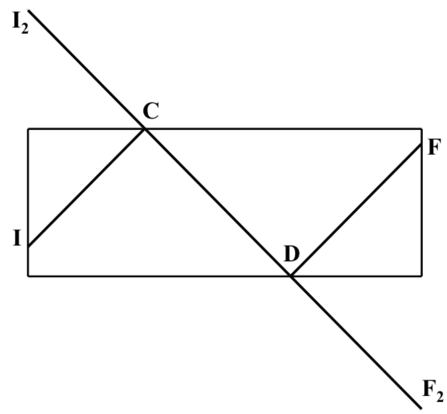
Poiché x_{n+1} dipende solamente da x_n, si avrà allora anche $x_5 = 1$, $x_6 = 1$ e così via, ovvero $x_n = 1$ per ogni $n \geq 3$. In particolare si avrà $x_{1000} = 1$.

Quesito 7. Risposta (e). Consideriamo il caso in cui i gemellini che dicono la verità siano Andrea, Corrado ed Ettore, e dunque che Bettino e Danilo mentano. In tal caso, dall'affermazione di Ettore (che dice la verità) si deduce che Andrea e Corrado sono i ladri; d'altronde, poiché Bettino mente, una delle sue affermazioni è falsa, dunque la prima; allora Bettino stesso sarebbe uno dei ladri, il che contraddice l'ipotesi che vi siano solo due ladri. Sono quindi necessariamente Bettino e Danilo a dire la verità, mentre Andrea, Corrado ed Ettore mentono. Dalle affermazioni (veritiere) di Danilo deduciamo che la palla è sua ed il trenino è di Ettore. Dalle affermazioni (veritiere) di Bettino deduciamo che Bettino non è un ladro, pertanto i ladri sono Andrea e Corrado. Ora, se Andrea avesse rubato la palla, Corrado avrebbe necessariamente rubato il trenino e l'affermazione di Ettore (che mente) risulterebbe vera. Pertanto possiamo dedurre che Andrea ha rubato il trenino (ad Ettore) e Corrado la palla (a Danilo).

Quesito 8. Risposta (a). Consideriamo un caso in cui il cavo, partendo da I, viene fissato prima in un punto A del bordo inferiore e poi in un punto sul bordo B superiore. Affinché si realizzi un minimo della lunghezza, il cavo costituirà una poligonale di vertici consecutivi $IABF$. La lunghezza di una tale poligonale uguaglia quella della poligonale di vertici I_1ABF_1 ove I_1 è il punto simmetrico di I rispetto al bordo inferiore e F_1 il punto simmetrico di F rispetto al bordo superiore (intendendo per simmetrie quelle ortogonali). Ma è immediato rendersi conto che tale poligonale I_1ABF_1 ha lunghezza minima esattamente quando coincide con il segmento rettilineo I_1F_1 (e A, B sono le intersezioni di tale segmento con il bordo rispettivamente inferiore, superiore).



Nell'altro caso che può presentarsi partendo da I si fissa il cavo prima in un punto C sul bordo superiore e poi in un punto D su quello inferiore, ottenendo una poligonale $ICDF$ e, operando analogamente al caso precedente mediante simmetrie, una corrispondente poligonale I_2CDF_2 dove I_2, F_2 sono rispettivamente i punti simmetrici di I, F rispetto al bordo superiore, inferiore.



Indichiamo con ℓ_1 la lunghezza minima della poligonale $IABF$, con ℓ_2 la lunghezza minima della poligonale $ICDF$ e osserviamo che esse devono verificare rispettivamente

$$8^2 + (3 + 0,6 + 0,3)^2 = (\ell_1)^2 \qquad , \qquad 8^2 + (3 + 2,7 + 2,4)^2 = (\ell_2)^2$$

Quindi la lunghezza minima è $\ell_1 = 8,9$ metri.

Quesito 9. Risposta (c). Si prova facilmente, utilizzando il binomio di Newton oppure per induzione che per ogni intero $n > 0$ si ha

$$9^n = (10 - 1)^n = (-1)^n + (-1)^{n-1}10n + 100a$$

per un oppurtuno intero a.

Notiamo che $a_2 = 28$ e che per ogni $n > 1$ a_n è un numero pari che quindi può essere del tipo $4k$ o $4k + 2$ con k intero positivo. Se $a_n = 4k$ allora

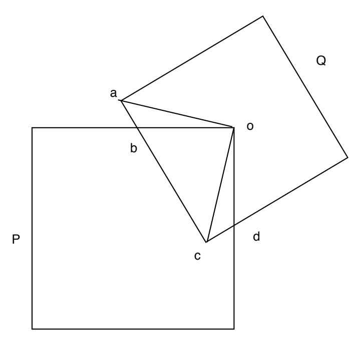
$$3^{4k} + 1 = (10 - 1)^{2k} + 1 = (100a - 20k + 1) + 1 = 20(5a - k) + 2.$$

Se $a_n = 4k + 2$ allora

$$3^{4k+2} + 1 = (10 - 1)^{2k+1} + 1 = (100a + 20k + 10 - 1) + 1 = 20(5a + k) + 10.$$

Dunque $a_n = 4k + 2$ per ogni $n > 2$ e a_n risulta divisibile per 10 per ogni $n > 3$.

Quesito 10. Risposta (e). Ogni quadrato Q di lato 1 con il baricentro in un vertice di P soddisfa le condizioni richieste e quindi la risposta corretta è infiniti (vedi figura).



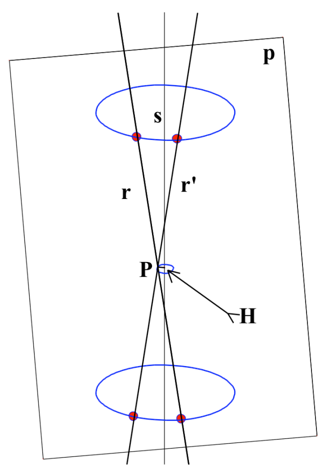
Se il centro del quadrato Q si trova in un vertice di P, allora i triangoli aob e cod sono uguali.

Quesito 11. Risposta (e). Possiamo rappresentare una colorazione dei vertici dell'n-agono regolare come una successione di n lettere B, R, V in modo che lettere consecutive siano diverse, così come anche la prima e l'ultima lettera. Da ogni colorazione dell'$(n - 1)$-agono regolare si ottiene una colorazione dell'n-agono regolare aggiungendo un'ultima lettera che sia diversa dalla prima e dall'$(n-1)$-esima. Da ogni colorazione dell'$(n-2)$-agono regolare si ottiene una colorazione dell'n-agono regolare aggiungendo due lettere: l'$(n-1)$-esima uguale alla prima, e l'n-esima, invece, tra le due lettere diverse a disposizione. In questa maniera otteniamo tutte le colorazioni dell'n-agono regolare, senza ripetizioni.

Se indichiamo con C_n il numero delle colorazioni dell'n-agono regolare che soddisfino le condizioni poste, abbiamo mostrato che $C_n = C_{n-1} + 2C_{n-2}$. Sappiamo che $C_3 = 6$, e si vede senza grosse difficoltà che $C_4 = 18$. Si ottiene allora $C_5 = 30, C_6 = 66$.

Si può risolvere il quesito anche contando esplicitamente tutte le colorazioni, e sfruttando le simmetrie del problema.

Quesito 12. Risposta (e). Le rette r, s stanno rispettivamente su due piani π, σ paralleli: π contenente r e parallelo a s, σ contenente s e parallelo a r. Il segmento PH sta sulla retta intersezione dei piani α, β perpendicolari sia a π che σ e contenenti r, s rispettivamente. Sia r' la retta immagine di r nella simmetria ortogonale rispetto al piano α, contenente P e s. Ogni punto R della retta r, ruotando attorno all'asse s, descrive una circonferenza che sta sul piano per R ortogonale a tale asse e che incontra π oltre che in R anche nel punto R' di r' intersezione con lo stesso piano. Non ci sono altri punti di π che stanno sulla superficie di rotazione considerata oltre quelli delle due rette r, r', le quali assieme costituiscono l'intersezione completa di π con $\mathcal{R}$.



Quesito 13. Risposta (b). La probabilità che Paolino passi dal punto F è pari a $p_F = \dfrac{1}{2}$, mentre la probabilità che Paolino passi dal punto M è $p_M = \dfrac{1}{2^{10}}\dbinom{10}{5} = \dfrac{63}{256}$. La probabilità che Paolino passi dal punto M partendo dal punto F è

$$p_{M|F} = \frac{1}{2^8}\binom{8}{4} = \frac{35}{128}\,,$$

quindi, la probabilità che Paolino passi sia dal punto F che dal punto M è

$$p_{FM} = p_F p_{M|F} = \frac{35}{256}\,.$$

La probabilità che Paolino passi dal punto F o dal punto M è pari a $p_F + p_M - p_{FM}$. Noi vogliamo calcolare la probabilità che Paolino non passi né dal punto F né dal punto M. Questa sarà pari a

$$1 - (p_F + p_M - p_{FM}) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{63}{256} + \frac{35}{256} = \frac{1}{2} - \frac{7}{64} = \frac{25}{64}\,.$$

Quesito 14. Risposta (e). I 14 quadrati

$$2^2, 3^2, 5^2, 7^2, 11^2, 13^2, 17^2, 19^2, 23^2, 29^2, 31^2, 37^2, 41^2, 43^2 = 1849,$$

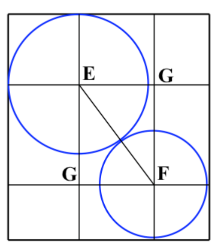
sono inferiori a 2011 e quindi possiamo completarli ad un insieme S aggiungendo 136 primi compresi tra 47 e 2011. Questo prova che $N \leq 136$. Viceversa sia S un insieme di 150 numeri a due a due senza fattori comuni e siano $a_1, \dots, a_n \in S$ i numeri composti. Per ogni $i = 1, \dots, n$ sia p_i il più piccolo primo che divide a_i, allora $p_i \neq p_j$ per ogni $i \neq j$ e $a_i \geq p_i^2$. Siccome $47^2 = 2209 > 2011$ ogni p_i deve essere minore di 47 e dunque $n \leq 14$, $N \geq 136$.

Quesito 15. Risposta (e). Denotiamo con r, R i raggi delle due circonferenze, intendendo che r è minore o uguale a R. Ci si deve innanzitutto rendere conto che in una configurazione per la quale la lunghezza complessiva delle due circonferenze è massima queste debbono toccarsi (ovvero essere tangenti in un punto), ciascuna deve essere tangente a una coppia di lati del rettangolo uscenti da uno dei suoi vertici, ed inoltre per le due circonferenze deve trattarsi di due vertici opposti. Ciò è molto intuitivo e può mostrarsi rigorosamente con i seguenti passi.

1) Se le due circonferenze non si toccano la differenza $h = d-(r+R)$ tra la distanza d dei rispettivi centri e la somma dei raggi è positiva e si può sostituire alla circonferenza di raggio r una di raggio più grande, ad esempio $r_1 = r + \frac{h}{4}$, spostandone il centro nella direzione del centro di quella di raggio R, per una lunghezza $\frac{h}{2}$.

2) Se le due circonferenze si toccano, operando eventualmente in successione una traslazione e poi una rotazione, è sempre possibile assumere che, a parità di lunghezza complessiva, una di esse è tangente a due lati del rettangolo concorrenti in uno stesso vertice e che il centro dell'altra si trova sulla bisettrice dell'angolo opposto al suddetto vertice. Se la seconda circonferenza non risulta tangente ai lati di quest'angolo sarà sempre possibile traslarne il centro nella direzione del rispettivo vertice aumentandone il raggio.

In definitiva, in una configurazione per la quale viene assunto il valore massimo del bordo complessivo le due circonferenze saranno tangenti tra loro e anche tangenti al bordo del rettangolo, ciascuna sui due lati concorrenti in uno stesso vertice. Chiamiamo E, F i centri delle due circonferenze e, considerato un vertice del rettangolo dal quale escono lati non tangenti ad una stessa circonferenza, sia G il punto di intersezione delle rette per E, F parallele a tali lati.



Risulta allora, salvo scambio di E con F,

$$40 = R + r + \overline{EG} \qquad , \qquad 45 = R + r + \overline{FG}$$

ed inoltre $\overline{EG}^2 + \overline{GF}^2 = (R+r)^2$. Eliminando $\overline{EG}, \overline{FG}$ si ha comunque l'equazione

$$(R+r)^2 - 170(R+r) + 3625 = 0$$

che risolta dà i valori $R + r = 25$, $R + r = 145$, dei quali il secondo va escluso dovendo sempre essere $R+r$ minore di 45. R può essere scelto arbitrariamente nell'intervallo tra 12,5 (valore per il quale $R = r$) e 20 (valore massimo di R). Quindi vi sono infiniti valori del massimo della somma $2\pi(R + r)$ delle lunghezze delle due circonferenze, tutti uguali a 50π metri.

Quesito 16. Risposta (d). Se k è un numero dispari lo è anche ogni potenza di k, quindi ad ogni sottrazione il risultato cambia di parità. Ne segue che vince il primo giocatore se e solo se N è dispari. Possiamo quindi scartare questa possibilità essendo 2011, dispari. Dunque, k è necessariamente pari. Analizziamo quindi il caso di $k = 2h$. Per intuire la soluzione possiamo iniziare a studiare i casi in cui N è piccolo. Osserviamo che per ogni numero N minore o uguale $k - 1$ l'unica potenza di k che possiamo togliere è 1, quindi vince il primo giocatore se e solo se N è dispari. Per $N = k$ vince chiaramente il primo giocatore. Per $N = k + 1$ sono permesse due mosse (togliere 1 o togliere k) che forniscono come risultato della sottrazione $M = k$ o $M = 1$ che sono due situazioni vincenti per il giocatore a cui si è passata la mano. Per $N = k+1$ vince quindi il secondo giocatore.

Possiamo continuare un po' in questo modo e arrivare a formulare la seguente ipotesi: dividiamo N per $k + 1$ e sia r il resto della divisione. Vogliamo mostrare che vince il primo giocatore se e solo se $r = 1,\ 3,\ 5, \ldots 2h - 1$ o $2h$. Abbiamo appena mostrato questo risultato per $N \leq k + 1$. Mostriamolo per induzione per ogni N. Indicheremo con $M = N - k^i$ il risultato della sottrazione e con s il resto della divisione di M per $k + 1$. Se $r = 1, 3, \ldots, 2h - 1$ possiamo togliere 1 e quindi $s = 0, 2, \ldots, 2h - 2$ e per ipotesi induttiva lasciamo la persona a cui abbiamo lasciato la mano in una posizione perdente. Similmente se $r = 2h = k$ possiamo togliere k, quindi $s = 0$ e lasciamo la persona a cui lasciamo la mano in una posizione perdente. Se $r = 0, 2, \ldots, 2h-2$ bisogna mostrare che qualsiasi potenza di k si tolga lasciamo il giocatore a cui lasciamo la mano in una posizione vincente ovvero che $s = 1, 3, \ldots, 2h - 1, 2h$. Sia $M = N - k^i$. Poiché $k = (k + 1) - 1$ il resto della divisione di k^i per $k + 1$ è 1 se i è pari e -1 se i è dispari. Quindi $s = r \pm 1$ o $s = 2h$ se $r = 0$ e i è pari. In tutti i casi vediamo che se $r \in \{0, 2, \ldots, 2h - 2\}$ allora $s \in \{1, 3, \ldots, 2h - 1, 2h\}$. Effettuando le divisioni per $k + 1$ con $N =$ l'anno di fidanzamento otteniamo i seguenti resti:

- per il 2 aprile 1984, $r = 1$, quindi vince Zerlina.
- per il 4 aprile 1985, $r = 0$, quindi vince Masetto.
- per il 6 aprile 1987, $r = 6$, quindi vince Zerlina.
- per l'8 aprile 1980, $r = 0$, quindi vince Masetto.

Possiamo quindi scartare anche il 4 aprile 1985 e l'8 aprile 1980. Effettuando le divisioni per $k+1$, con $N =$2011 otteniamo i seguenti resti:

- se $k = 2$ e $N = 2011$, abbiamo $r = 1$, quindi vince Zerlina.
- se $k = 6$ e $N = 2011$, abbiamo $r = 2$, quindi vince Masetto.

Possiamo allora scartare $k = 2$ e concludere che la data di fidanzamento è il 6 aprile 1987.