PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA – SEZIONE DI ROMA

GARA INDIVIDUALE

Roma, 13 marzo 2012

Dipartimenti di Matematica delle Università
Sapienza, Tor Vergata, Roma Tre

con il sostegno di:
Unione Matematica Italiana, Istituto Nazionale di Alta Matematica,
Progetto Lauree Scientifiche, CARFID

Quesito 1. Sia $P = (a, b)$ un punto scelto a caso con probabilià uniforme nel quadrato

$$\mathcal{Q} = \{(a, b) : |a| \leq 1, |b| \leq 1\}$$

Si determini la probabilità che le radici dell'equazione $x^2 + ax + b^2 = 0$ siano reali positive.

Quesito 2. Se n è un numero intero positivo, sia $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ il prodotto di tutti i numeri interi da 1 a n. Si dimostri che per ogni $n \geq 3$ esistono n interi positivi distinti d_1, d_2, ..., d_n, divisori di $n!$ tali che:

$$n! = d_1 + d_2 + \cdots + d_n$$

Quesito 3. Descrivere tutte le successioni $x_0, x_1, x_2, \ldots$ di numeri interi che verificano entrambe le seguenti condizioni:

a) $x_n x_{n-1} = x_{n-2}$ per ogni $n \geq 2$,

b) $|x_0 + x_2 + x_4 + \cdots + x_{2r}| \leq 2012$ per ogni $r > 0$.

Quesito 4. Si consideri la scrittura:

$$\sqrt{12} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cfrac{1}{a_5 + \cfrac{1}{a_6 + \cfrac{1}{a_7 + \cfrac{1}{a_8 + \cfrac{1}{a_9 + \cfrac{1}{a_{10} + \cfrac{1}{a_{11} + \cfrac{1}{a_{12}}}}}}}}}}}}}$$

con a_i intero positivi per $0 \leq i \leq 11$, ed a_{12} reale maggiore di 1. Quanto vale a_{11}?