PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA – SEZIONE DI ROMA

GARA A SQUADRE

Roma, 7 marzo 2012

Dipartimenti di Matematica delle Università
Sapienza, Tor Vergata, Roma Tre

con il sostegno di:
Unione Matematica Italiana, Istituto Nazionale di Alta Matematica,
Progetto Lauree Scientifiche, CARFID

Quesito 1. In una ditta di 30 operai esiste un'abitudine un po' strana: in occasione del proprio compleanno ogni operaio offre una colazione ai soli colleghi più giovani. Sapendo che tutti sono nati in anni distinti, quante colazioni sono offerte in un anno?

(a) 225

(b) 435

(c) 450

(d) 841

(e) 870

(f) 900

Quesito 2. Nell'isola che non c'è abitano tre tipi di persone: i cavalieri, che dicono sempre la verita', i pirati, che mentono sempre, e le spie, che possono mentire o dire la verita'. L'esploratrice Dora incontra tre isolani: Alice, Bruno e Carla. Dora sa che uno di loro è un cavaliere, uno è un pirata, ed un altro è una spia.
– Alice dice: Carla è il pirata.
– Bruno afferma: Alice è il cavaliere.
– Carla aggiunge: Alice non è il pirata.
Dora capisce allora che il cavaliere, il pirata e la spia sono, nell'ordine:

(a) Alice, Bruno, Carla

(b) Alice, Carla, Bruno

(c) Bruno, Alice, Carla

(d) Bruno, Carla, Alice

(e) Carla, Alice, Bruno

(f) Carla, Bruno, Alice

Quesito 3. I fratelli Torrez sono famosi per il loro numero circense noto come *Il salto decuplo alla Torrez.* I dieci fratelli salgono uno sulle spalle dell'altro dal più pesante, Tor, al più leggero, Minu, formando una pila umana. Al rullo dei tamburi, Tor alla base della pila salta in verticale. All'apice del suo salto, il fratello sulle sue spalle salta, e così via fino al fratello più in alto, Minu. I fratelli sono alti $190, 180, \ldots, 100$ cm, e ogni fratello compie un salto di n centimetri, dove n è la differenza tra il suo peso (espresso in Kg) e il peso del fratello che ha sulle spalle. Sapendo che Minu pesa 40 Kg (e quindi salta 40 cm) e che arriva all'apice del suo salto con la testa a quota 16 metri, quanto pesa Tor?

(a) 70Kg

(b) 100Kg

(c) 110Kg

(d) 120Kg

(e) 150Kg

(f) 190 Kg

Quesito 4. Affinché x sia razionale, quale tra le seguenti condizioni è sufficiente che sia verificata?

(a) $x + x^2$ è razionale

(b) x^6 e x^{21} sono razionali

(c) $x\sqrt{2}$ e $x/\sqrt{2}$ sono irrazionali

(d) x^{14} e x^{11} sono razionali

(e) x non è la radice quadrata di alcun numero intero

(f) nessuna delle precedenti

Quesito 5. A ciascuna lettera della parola ORTE è assegnata una cifra decimale compresa tra 0 e 9. Sapendo che $7 + \text{OTTO} = 5 \times \text{TRE}$, quanto vale R?

(a) 0

(b) 1

(c) 3

(d) 5

(e) 7

(f) 9

Quesito 6. Si consideri il numero (enorme) $3^{\uparrow n}$, definito nel seguente modo: si eleva 3 alla 3, quindi il risultato ancora alla 3, ecc..., eseguendo in totale $n-1$ elevazioni a potenza (per es., $3^{\uparrow 3} = (3^3)^3 = 19683$). La cifra delle unità di $3^{\uparrow 100}$ è:

(a) 0

(b) 1

(c) 3

(d) 5

(e) 7

(f) 9

Quesito 7. Partecipate ad un gioco a premi. Ci sono 10 carte coperte, tutte diverse dall'uno al dieci, ed una sola è vincente, l'asso. Il conduttore vi fa scegliere due carte e, prima che le guardiate, ne scopre una non vincente dal gruppo delle 8 rimanenti. Quindi vi chiede se volete cambiare una o due delle vostre carte con altrettante tra quelle rimaste coperte. La probabilità di vittoria, scegliendo di cambiare una carta, è:

(a) $\frac{1}{7}$

(b) $\frac{1}{8}$

(c) $\frac{2}{9}$

(d) $\frac{12}{35}$

(e) $\frac{15}{70}$

(f) uguale alla probabilità di vincere cambiandone due

Quesito 8. Un anno fa, lo sprovveduto Gregor Salsa acquistò 100 corone di azioni della florida *Clotamax Corporation*. La mattina dopo, senza che avesse fatto alcunché di male, Gregor Salsa constatò che le sue azioni avevano perso il 10% del loro valore. La mattina seguente, constatò con stupore che le sue azioni avevano guadagnato il 10% del loro valore rispetto al giorno prima. Da quel giorno, le azioni della *Clotamax Corporation* alternano giornate nelle quali guadagnano il 10% a giornate nelle quali perdono il 10%. Oggi, dopo esattamente un anno, le azioni di Gregor Salsa quante corone valgono?

(a) meno di 40

(b) tra 40 e 50

(c) tra 50 e 60

(d) tra 60 e 70

(e) tra 70 e 80

(f) tra 80 e 90

Quesito 9. La magnifica Trantor conta una popolazione di circa 75 milardi di abitanti. È noto che ogni Trantoriano ha al più un diavolo per capello, e nessuno ha più di 200.000 capelli. Da questi dati è possibile dedurre con certezza che:

(a) esistono sempre due trantoriani con lo stesso numero di capelli in testa,
ma non ne esistono due con lo stesso numero di diavoli e capelli

(b) esistono sempre due trantoriani con lo stesso numero di diavoli e capelli in testa,
ma non è detto che ne esistano tre

(c) esistono sempre tre trantoriani con lo stesso numero di diavoli e capelli in testa,
ma non è detto che ne esistano quattro

(d) esistono sempre quattro trantoriani con lo stesso numero di diavoli e capelli in testa,
ma non è detto che ne esistano cinque

(e) non esistono più di quattro trantoriani con lo stesso numero di diavoli e capelli in testa

(f) nessuna delle precedenti è vera

Quesito 10. Siano A, B, C, D i quattro vertici, letti in senso antiorario, di un quadrilatero convesso $\mathcal{Q}$ e sia E un punto interno a $\mathcal{Q}$. Si conoscono le lunghezze dei seguenti segmenti:

$$AB = AC = AD = \sqrt{3}, \quad AE = 1, \quad BE = 2, \quad CE = \sqrt{2}, \quad DE = 1.$$

Calcolare la distanza di C dalla retta passante per B e D.

(a) $\sqrt{2}/2$

(b) $\sqrt{3} - 1$

(c) $(\sqrt{2} + 1)/3$

(d) $\sqrt{2}$

(e) 1

(f) $2\sqrt{3}/5$

Quesito 11. Il maestro chiede a Gerolamo e a Niccolò di contare in quanti modi si può ricoprire una striscia rettangolare alta 2 e lunga 21, con dei rettangolini di dimensioni 1×2 (senza fuoriscire dalla striscia, e senza sovrapposizioni): "Così staranno tranquilli per un po'!" pensa il maestro. Il piccolo Gerolamo si mette pazientemente a contare in quanti modi si può coprire una striscia alta 2 e lunga 3, poi 4, poi 5... infine crolla esausto, e dice a Niccolò: "Non ce la faccio più, sono arrivato a contare i modi per ricoprire una striscia lunga 9, e sono 55; ma non ce la farò mai ad arrivare ad una striscia lunga 21! Tu a quanto sei arrivato" E Niccolò: "Io sono arrivato fino a 10, e ci sono 89 modi possibili. Ma a questo punto non c'è bisogno che proseguiamo: mi è venuta un'idea più furba per arrivare al risultato!" Quanti sono i modi di ricoprire una striscia lunga 21?

(a) 9753

(b) 12151

(c) 17711

(d) 19823

(e) 27771

(f) 54005

Quesito 12. Albert osserva Mr. Big F e Mr. Little N correre in un tunnel circolare in direzione opposta. Albert nota che Mr. Big F, percorrendo n giri completi, incontra k volte Mr. Little N, con $k > n \geq 1$. Supponendo che entrambi corrano con velocità costanti v_F e v_N, Albert (trascurando ogni nozione di relatività, teoria a lui ignota) può affermare che:

(a) $|v_F - v_N| \leq (2 - \frac{k+1}{n})v_F$

(b) $|v_F - v_N| \geq (2 - \frac{k-1}{n})v_F$

(c) la differenza delle velocità non può essere arbitrariamente grande

(d) $v_F/v_N \leq \frac{n}{k-n}$

(e) $v_F/v_N \geq \frac{n}{k-n+1}$

(f) il quoziente delle velocità non può essere arbitrariamente grande

Per le ultime tre domande, la risposta deve essere un numero intero tra 0 e 9999.

Quesito 13. Quante sono le coppie di numeri interi positivi a, b tali che

$$a \leq b, \qquad ab = 2012 + a + b.$$

Risposta: ....

Quesito 14. Alice vuole uscire da un giardino stregato di forma circolare e la Strega vuole impedirglielo. Alice può spostarsi in qualsiasi direzione con passi di lunghezza 1m, ma, ogni volta che sta per fare un passo, la Strega può confonderla e decidere di farla muovere nel verso esattamente opposto a quello da lei scelto, in modo da tenerla sempre il più lontano possibile dal bordo del giardino. Supponendo che il raggio del giardino sia 4.5m e che Alice all'inizio si trovi al centro, qual è il numero minimo di passi necessari ad Alice per uscire?

Risposta: ....

Quesito 15. In una scacchiera 7×7 bisogna disporre consecutivamente in ordine crescente, partendo dalla casella in alto a sinistra, i numeri interi da 1 a 49 (uno per casella), muovendosi ogni volta da una casella ad una adiacente, orizzontalmente o verticalmente. Provando tutti i cammini possibili, quanti sono i numeri che possono effettivamente occupare la casella in basso a destra?

Risposta: ....