PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA – SEZIONE DI ROMA

GARA INDIVIDUALE - SOLUZIONI

Roma, 13 marzo 2012

Dipartimenti di Matematica delle Università
Sapienza, Tor Vergata, Roma Tre

con il sostegno di:
Unione Matematica Italiana, Istituto Nazionale di Alta Matematica,
Progetto Lauree Scientifiche, CARFID

Quesito 1. La condizione affinché le radici di $x^2 + ax + b^2 = 0$ siano reali è $\Delta = a^2 - 4b^2 \geq 0$, dunque

$$-\frac{|a|}{2} \leq b \leq \frac{|a|}{2} \tag{1}$$

Per tali valori di a, b le radici sono reali e la loro somma fa $-a$. Poiché il loro prodotto è positivo, le radici saranno positive se e solo se la loro somma lo è, cioè

$$a < 0 \tag{2}$$

Rappresentando in un sistema di assi cartesiani in ascissa i valori di a e in ordinata i valori di b, le radici dell'equazione saranno dunque reali positive se e solo se (a, b) cade nella regione $\mathcal{R}$ del piano determinata dalle equazioni (1) e (2). Tale regione è un triangolo isoscele di base 1 e altezza 1. Calcolando la probabilità come il rapporto tra l'area della regione $\mathcal{R}$ (i casi "favorevoli") e l'area del quadrato $\mathcal{Q} = \{(a, b) : |a| \leq 1, |b| \leq 1\}$ (casi possibili), si ottiene che la probabilità che le radici siano reali positive è $P = \frac{area(\mathcal{R})}{area(\mathcal{Q})} = (\frac{1}{2})/2^2 = \frac{1}{8}$.

Quesito 2. Dimostriamo che $\forall n \geq 3$ esistono degli interi $1 = d_1 < d_2 < d_3 < \cdots < d_n$ che dividono $n!$, e tali che $n! = 1 + d_2 + d_3 + \cdots + d_n$. La proprietà è certamente vera per $n = 3$, in quanto $3! = 6 = 1 + 2 + 3$ e gli interi 1, 2 e 3 dividono $3!$. Dal caso $n = 3$ possiamo quindi dedurre il caso $n = 4$: infatti

$$4! = 4 \cdot 3! = 4 \cdot (1 + 2 + 3) = 4 + 4 \cdot 2 + 4 \cdot 3 = 1 + 3 + 4 \cdot 2 + 4 \cdot 3$$

essendo 1, 3, $4 \cdot 2$ e $4 \cdot 3$ tutti divisori distinti di $4!$. Possiamo proseguire indefinitamente in tal modo, mostrando che se la proprietà è vera fino a n, allora è vera per $n + 1$: infatti,

$$(n + 1)! = (n + 1) \cdot n! = (n + 1) + (n + 1)d_2 + \cdots + (n + 1)d_n = 1 + n + (n + 1)d_2 + \cdots + (n + 1)d_n.$$

Posto dunque $d'_1 = 1$, $d'_2 = n$ e $d'_i = (n+1)d_{i-1}$ per $i = 3, 4, \ldots, n+1$, si ha $(n+1)! = 1 + d'_2 + d'_3 + \cdots + d'_{n+1}$ con ciascun d'_i che divide $(n+1)!$ (poiché d_i divideva $n!$), ed ancora si ha ovviamente $1 < d'_2 < d'_3 < \cdots < d'_{n+1}$. In questo modo si ottiene la tesi per ogni n arbitrariamente grande.

Quesito 3. Consideriamo dapprima il caso $x_0 \cdot x_1 \neq 0$. Si ha allora:

$$x_2 = x_0/x_1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x_4 = x_2/x_3 = x_0/(x_1x_3) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x_6 = x_4/x_5 = x_0/(x_1x_3x_5) \neq 0$$

e quindi, dalle relazioni $x_{2i}x_{2i-1} = x_{2i-1}$, ripetendo il ragionamento fino a n si ottiene $x_{2n} = x_0/(x_1 \cdots x_{2n-1})$. Poiché per ipotesi ogni x_i è intero, qualsiasi sia il valore iniziale x_0 fissato, da un certo n in poi si deve avere $x_{2n+1} = \pm 1$; e dunque, usando la relazione $x_{n-1} = x_{n-2}/x_n$ e procedendo a ritroso, si ottiene $x_n = \pm 1$ per ogni n. Notiamo quindi che, sempre dalla relazione (a), si ha: $segno(x_n) = segno(x_{n-1})segno(x_{n-2})$. Pertanto le successioni possibili sono:

$$\begin{array}{llllllllllll}
+1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & \cdots & \text{(i.e. costante su} + 1) \\
+1 & -1 & -1 & +1 & -1 & -1 & +1 & -1 & -1 & +1 & \cdots & \text{(i.e. } x_{3k} = +1) \\
-1 & +1 & -1 & -1 & +1 & -1 & -1 & +1 & -1 & -1 & \cdots & \text{(i.e. } x_{3k+1} = +1) \\
-1 & -1 & +1 & -1 & -1 & +1 & -1 & -1 & +1 & -1 & \cdots & \text{(i.e. } x_{3k+2} = +1)
\end{array}$$

Nessuna di queste successioni soddisfa però la proprietà (b): per le ultime tre, è sufficiente notare che, tra i termini di indice pari fino a x_n ($n \gg 0$), quelli positivi sono sempre circa la metà di quelli negativi. Nella seconda successione infatti, i termini di indice pari positivi sono del tipo x_{6k}, mentre quelli del tipo x_{6k+2} e x_{6k+4} sono negativi. Analogamente nella terza e nella quarta successione.
Consideriamo ora il caso $x_0 \cdot x_1 = 0$. In tal caso si ha necessariamente $x_0 = x_1 = 0$: infatti, l'equazione $x_2 \cdot x_1 = x_0$ implica che se $x_1 = 0$ allora $x_0 = 0$; viceversa, se $x_0 = 0$, la stessa equazione implica direttamente $x_1 = 0$, oppure $x_2 = 0$ e quindi comunque $x_1 = 0$, a causa della relazione $x_3 x_2 = x_1$. Pertanto l'unica successione che verifica (a) e (b) è la successione costantemente uguale a 0.

Quesito 4. Per ricostruire la sequenza $a_0, a_1, \dots$ procediamo come segue. Innanzitutto notiamo che, poiché gli a_i son tutti maggiori di 1, si ha:

$$0 < \sqrt{12} - a_0 < 1$$

Quindi a_0 è univocamente determinato, ed è uguale alla parte intera di $\sqrt{12}$, cioè $a_0 = [\sqrt{12}] = 3$.
Passo 1: possiamo scrivere dunque $\sqrt{12} = a_0 + \frac{1}{y_0} = 3 + \frac{1}{y_0}$, con

$$y_0 = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cfrac{1}{a_5 + \cfrac{1}{a_6 + \cfrac{1}{a_7 + \cfrac{1}{a_8 + \cfrac{1}{a_9 + \cfrac{1}{a_{10} + \cfrac{1}{a_{11} + \cfrac{1}{a_{12}}}}}}}}}}}$$

Come prima, visto che gli a_i son tutti maggiori di 1, notiamo che a_1 è univocamente determinato, ed è uguale alla parte intera di $y_0 = \frac{1}{\sqrt{12}-a_0} = \frac{1}{\sqrt{12}-3} = 1 + \frac{\sqrt{12}}{3}$, cioè $a_1 = [1 + \frac{\sqrt{12}}{3}] = 2$.
Passo 2: scriviamo ancora $y_0 = a_1 + \frac{1}{y_1} = 2 + \frac{1}{y_1}$, dove

$$y_1 = a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cfrac{1}{a_5 + \cfrac{1}{a_6 + \cfrac{1}{a_7 + \cfrac{1}{a_8 + \cfrac{1}{a_9 + \cfrac{1}{a_{10} + \cfrac{1}{a_{11} + \cfrac{1}{a_{12}}}}}}}}}}$$

e, di nuovo, a_2 è la parte intera di $y_1 = \frac{1}{y_0 - a_1} = \sqrt{12} + 3$, cioè $a_2 = [\sqrt{12} + 3] = 6$.
Passo 3: iterando la procedura ancora una volta, scriviamo $y_1 = a_2 + \frac{1}{y_2}$ e troviamo $y_2 = \frac{1}{\sqrt{12}+3-6} = \frac{1}{\sqrt{12}-3} = y_0$.
Ritroviamo quindi il resto del passo 1; i resti $1/y_i$ e gli interi successivi nella sequenza degli a_i saranno allora sempre gli stessi dei primi due passi, e cioè:

$$a_1 = a_3 = a_5 = a_7 = a_9 = a_{11} = 2\,, \qquad a_2 = a_4 = a_6 = a_8 = a_{10} = 6.$$

$$y_1 = y_3 = y_5 = y_7 = y_9 = y_{11} = \sqrt{12} + 3\,, \qquad y_2 = y_4 = y_6 = y_8 = y_{10} = 1 + \frac{\sqrt{12}}{3}$$

mentre $a_{12} = y_{11} = (y_{10} - a_{11})^{-1} = \sqrt{12} + 3$. La risposta è quindi $a_{11} = 2$.