PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA – SEZIONE DI ROMA

GARA A SQUADRE - SOLUZIONI

Roma, 7 marzo 2012

Dipartimenti di Matematica delle Università
Sapienza, Tor Vergata, Roma Tre

con il sostegno di:
Unione Matematica Italiana, Istituto Nazionale di Alta Matematica,
Progetto Lauree Scientifiche, CARFID

Quesito 1 Tenendo conto che il più giovane non offre la colazione a nessuno, e il più anziano la offre a 29 persone, il numero totale di colazioni offerte nell'anno è pari a

$$N = 0 + 1 + 2 + \cdots + 29 = (0 + 29) + (1 + 28) + \cdots (14 + 15) = 29 \cdot 15 = 435$$

La risposta giusta è la (b).

Quesito 2 Se Alice dice la verità, allora Carla mente, e quindi anche Alice mente e abbiamo una contraddizione. Quindi Alice mente sicuramente, dunque mente anche Bruno. Allora Carla deve essere il cavaliere, quindi Alice è la spia e Bruno il pirata. La risposta giusta è dunque la (f).

Quesito 3 La somma A delle altezze dei fratelli (in cm) è $A = (100+190)+...+(140+150) = 5(290) = 1450$. Chiamiamo $P_1 \leq P_2 \leq \cdots \leq P_{10} = 40$ i pesi (in Kg) dei dieci fratelli. La somma S dei salti di tutti i fratelli è

$$S = (P_1 - P_2) + \ldots + (P_9 - P_{10}) + P_{10} = P_1$$

D'altronde, sappiamo che $1600 = (S + A) = P_1 + 1450$, da cui $P_1 = 150$. La risposta giusta quindi è la (e).

Quesito 4. Se x^{14} e x^{11} sono razionali, lo sono pure $(x^{14})^4 = x^{56}$ e $(x^{11})^5 = x^{55}$; dunque $x = \frac{x^{56}}{x^{55}}$ è razionale. Per convincersi che le altre ipotesi non permettono di concludere la razionalità di x, si osservi innanzitutto che per $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ si ha $x^2 + x = 1$, il che esclude la (a). Poi, se $x = \sqrt[3]{2}$ allora $x^6 = 4$ e $x^{21} = 2^7$ sono entrambi razionali, quindi anche la (b) non è condizione sufficiente alla razionalità di x. Scegliendo infine il numero irrazionale $x = 1 + \sqrt{2}$, si vede che né (c), né (e) sono sufficienti, in quanto in tal caso $x\sqrt{2} = 2 + \sqrt{2}$, $x/\sqrt{2} = 1 + 1/\sqrt{2}$ sono irrazionali, e $x^2 = 3 + 2\sqrt{2}$ non è intero.

Quesito 5. Sappiamo che $7 + \mathrm{OTTO}$ è divisibile per 5, dunque la cifra delle unità è 0 oppure 5; quindi O vale 3 oppure 8. Il caso $O = 8$ è escluso, dal momento che

$$7 + \mathrm{OTTO} \geq 7 + 8008 = 8015 > 4495 = 5 \times 899 \geq 5 \times \mathrm{TRE}$$

Dunque $O = 3$. Inoltre, poiché $7 + \mathrm{OTTO} \geq 3010$, si ha $\mathrm{TRE} \geq 3010/5 = 602$ e dunque $T \geq 6$. Le possibilità sono allora: $T = 6, 7, 8, 9$ e, nei rispettivi casi, $\mathrm{TRE} = (7 + \mathrm{OTTO})/5 = 734, 756, 778, 800$. L'unica possibilità, tra queste, in cui la cifra delle centinaia di TRE coincida con T è $T = 7$. Quindi $O = 8, T = 7$ ed $R = 5, E = 6$. La risposta giusta è la (d).

Quesito 6. Si noti intanto che il numero $3^{\uparrow 2} = 3^3 = 27$ ha come cifra delle unità il numero 7. Inoltre ogni numero che ha come cifra delle unità 7, quando viene elevato al cubo fornisce un numero che termina con 3. Infatti:

$$(10 \cdot a + 7)^3 = (\text{termini con potenze di } 10) + 7^3,$$

e $7^3 = 343$. Allo stesso modo si osserva che un numero che ha come cifra delle unità 3, se viene elevato al cubo, produce un numero che ha come cifra delle unità 7. Quindi la sequenza dei numeri 3, 3^3, $(3^3)^3$, $\ldots$, termina alternativamente con 3 e con 7; pertanto $3^{\uparrow 100}$ terminerà con 7. La risposta giusta è la (e).

Quesito 7. Ricordiamo che, detti A e B due eventi, la probabilità che accadano *entrambi* è

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$$

dove $P(A|B)$ è la probabilità di A, dato per certo che B si verifichi ("probabilità di A condizionata a B"); se il verificarsi di B non influenza la probabilità che si verifichi o meno A, allora $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. La probabilità che accada *almeno uno dei due* è invece

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

e se i due eventi si escludono a vicenda (cioè $A \cap B = \emptyset$) allora si ha semplicemente $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Consideriamo ora gli eventi:

$$A_0 = \text{ ho l'asso tra le due prime carte pescate}$$

$$A_0^* = \text{ non ho l'asso tra le due prime carte pescate}$$

$$A_1 = \text{ ho l'asso in mano dopo aver cambiato una carta}$$

$$A_2 = \text{ ho l'asso in mano dopo aver cambiato entrambe le carte}$$

La probabilità di avere un asso pescando due carte tra le dieci si calcola come rapporto tra i casi favorevoli e quelli possibili:

$$P(A_0) = \frac{\textit{numero di sottoinsiemi di } 2 \textit{ elementi scelti tra } \{1,2,...,10\}, \textit{ contenenti l'}1}{\textit{numero di tutti i sottoinsiemi di } 2 \textit{ elementi scelti tra } \{1,2,...,10\}} = \frac{9}{\binom{10}{2}} = \frac{1}{5}$$

(In alternativa, $P(A_0)$ può essere calcolato come la probabilità di pescare un asso con la prima carta, cioè $\frac{1}{10}$, più la probabilità di pescarlo con la seconda, condizionata a non averlo pescato con la prima: $\frac{1}{9} \cdot \frac{9}{10}$). Quindi $P(A_0^*) = \frac{4}{5}$ mentre, chiaramente, $P(A_1|A_0) = \frac{1}{2}$ e $P(A_1|A_0^*) = \frac{1}{7}$ (pescando tra le sette restanti coperte). D'altronde $P(A_2|A_0) = 0$ e $P(A_2|A_0^*) = \frac{1}{4}$ (essendo quest'ultima uguale alla probabilità di prendere una carta vincente pescandone due tra otto, calcolata come prima). Allora:

$$P(A_1) = P(A_1|A_0)P(A_0) + P(A_1|A_0^*)P(A_0^*) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{7} \cdot \frac{4}{5} = \frac{15}{70}$$

$$P(A_2) = P(A_2|A_0)P(A_0) + P(A_2|A_0^*)P(A_0^*) = 0 \cdot \frac{1}{5} + \frac{2}{7} \cdot \frac{4}{5} = \frac{16}{70}$$

La risposta giusta è quindi la (e).

Quesito 8. Detto x_n il capitale di Gregor all'n-mo giorno, con n *dispari*, al giorno $n+2$ il capitale sarà

$$x_{n+2} = x_n - \frac{1}{10}x_n + \frac{1}{10}\left(x_n - \frac{1}{10}x_n\right) = x_n - \frac{1}{100}x_n = \frac{99}{100}x_n$$

A partire dal primo giorno, quindi, le azioni di Gregor perdono l'1% del loro valore ogni due giorni. Dunque, $x_{365} = \left(\frac{99}{100}\right)^{182} x_1$. Non resta che stimare il numero $c = (\frac{99}{100})^{182}$ oppure, equivalentemente, il suo inverso $c^{-1} = (\frac{100}{99})^{182}$. Per la regola della potenza di un binomio si ha:

$$c^{-1} = \left(1 + \frac{1}{99}\right)^{182} > 1 + 182 \cdot \left(\frac{1}{99}\right) > 2,8$$

dunque

$$x_{365} = \frac{x_1}{c^{-1}} < \frac{100}{2,8} \simeq 35,7$$

Si noti che $x_{366} < x_{365}$, pertanto (anche se l'anno fosse bisestile) la risposta giusta è la (a).

Quesito 9. Attacchiamo ad ogni trantoriano un'etichetta (c,d) dove c è il suo numero di capelli, e d il numero di diavoli che ha in testa. Il numero n di possibili etichette è

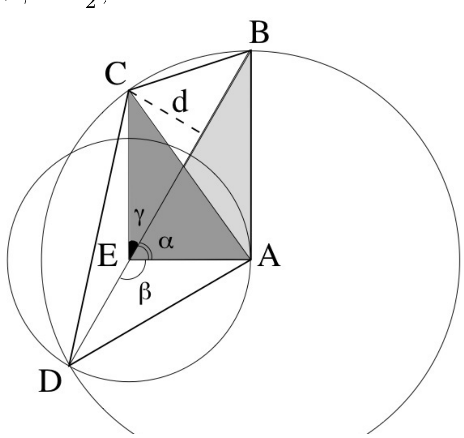
$$n = \sharp\{(c,d) : \text{interi con } 0 \le c \le 2{\cdot}10^5, 0 \le d \le c\} = 1 + \sum_{c=1}^{2\cdot 10^5}(c+1) = 1 + 2{\cdot}10^5 + \frac{2\cdot 10^5(2\cdot 10^5+1)}{2} = 2{\cdot}10^{10} + 3{\cdot}10^5 + 1$$

mentre il numero di trantoriani è $N = 7,5 \cdot 10^{10}$. Se ogni etichetta comparisse su al più tre trantoriani, i trantoriani sarebbero non più di $3 \cdot n$, che è un numero minore di N, contraddizione. Segue che ci sono sicuramente almeno 4 trantoriani con la stessa etichetta, cioè con lo stesso numero di capelli e diavoli. Inoltre, poiché $4n > N$, è possibile immaginare una Trantor in cui ogni etichetta sia portata al massimo da quattro trantoriani, il che mostra che l'asserzione (d) è vera. Si noti infine che se, per legge, tutti i trantoriani fossero calvi, allora la (e) sarebbe certamente falsa. In conclusione la risposta giusta è la (d).

Quesito 10. I triangoli AEC e EAB sono rettangoli, con angolo retto rispettivamente in E ed A, in quanto $AE^2 + EC^2 = AC^2$ e $EA^2 + AB^2 = EB^2$. Tracciata quindi la circonferenza C_A di centro A e raggio $AB = \sqrt{3} = AD$, e la circonferenza C_E di centro E e raggio $EA = 1 = ED$, si ha che $D \in C_A \cap C_E$; inoltre esso giace, rispetto alla retta per E ed A, nel semipiano opposto a C, poiché E è interno al quadrilatero $ABCD$ per ipotesi. Si considerino ora gli angoli $\alpha = A\hat{E}B$ e $\beta = A\hat{E}D$. Per la formula dell'angolo adiacente a un cateto, applicata al triangolo rettangolo EAB, risulta $\alpha = \frac{\pi}{3}$; invece la formula del coseno, applicata al triangolo isoscele AED, dà:

$$3 = AD^2 = EA^2 + ED^2 - 2\cos\beta = 2 - 2\cos\beta$$

dunque $\beta = \frac{2\pi}{3}$. Se ne deduce che $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, ovvero che la retta r che unisce B e D passa per il punto E.



Detto allora $\gamma = B\hat{E}C$, si ha per differenza $\gamma = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$ e dunque $d(C,r) = EC\sin\gamma = \sqrt{2}/2$. La risposta giusta è quindi la (a).

Quesito 11. Pensiamo la striscia come una tabella con 2 righe e 21 colonnine, riempita con rettangolini orizzontali o verticali da 1×2 caselle, e guardiamo l'11-ma colonnina. Sono possibili tre casi: essa può essere occupata da un rettangolino 1×2 messo in verticale, oppure dalle caselle sinistre di due rettangolini 1×2 messi in orizzontale uno sopra all'altro, oppure dalle caselle destre di due rettangolini orizzontali uno sopra all'altro (i due rettangolini non possono in alcun modo essere sfalsati uno rispetto all'altro). Il numero r_1 di ricoprimenti compatibili con la presenza del rettangolino 1×2 messo in verticale nell'11-ma colonna è

$$r_1 = (\text{numero di ricoprimenti di una tabella lunga 10}) \cdot (\text{numero di ricoprimenti di una tabella lunga 10})$$

I numeri r_2 ed r_3 di ricoprimenti compatibili con il secondo e terzo caso caso sono invece

$$r_2 = r_3 = (\text{numero di ricoprimenti di una tabella lunga 10}) \cdot (\text{numero di ricoprimenti di una tabella lunga 9})$$

Sapendo che 55 sono i ricoprimenti di una tabella lunga 9, e 89 i ricoprimenti di una tabella lunga 10, troviamo che il numero di ricoprimenti di una tabella lunga 21 è $r = r_1 + r_2 + r_3 = 89^2 + 2 \cdot 89 \cdot 55 = 17711$.

Quesito 12. Supponiamo che un giro completo del corridoio misuri ℓ, e sia Δt il tempo che Mr. Big F impiega a fare n giri completi. Nel sistema di riferimento di Mr. Big F, lo spazio percorso da Mr. Little N nell'intervallo di tempo Δt è $\Delta s'_N$, stimabile come

$$(k-1)\ell \ \leq \ \Delta s'_N = (v_F + v_N)\Delta t \ < \ (k+1)\ell$$

(la disuguaglianza a sinistra è un'uguaglianza solo se i due partono dallo stesso punto, e la disuguaglianza a destra è sempre stretta). Considerato che $v_F = \frac{n\ell}{\Delta t}$, dividendo tutto per Δt e sottraendo v_F si ottiene:

$$\frac{(k-n-1)}{n} v_F \leq v_N < \frac{(k-n+1)}{n} v_F$$

I reciproci della disuguaglianza destra danno la (e). Verifichiamo anche che le altre 5 risposte sono, in generale, false. La (a) non può essere vera per ogni valore di $k > n \geq 1$, in quanto se k è molto grande si ottiene che $|v_F - v_n|$ è minore di un numero negativo, assurdo. Considerato poi un qualsiasi caso in cui $v_F \neq v_N$, se si moltiplicano entrambe le velocità per una costante $C \gg 0$ grande a piacere si deduce che la differenza delle due velocità può essere arbitrariamente grande, il che esclude (c). È possibile inoltre che Mr. Big F e Mr. Little N partano vicinissimi uno di fronte all'altro, e che Mr. Big F compia n giri mentre Mr. Little N si è mosso appena di ϵ; in tal caso gli incontri risulteranno precisamente $n+1$, ed il quoziente delle velocità v_F/v_N può essere grande a piacere: ciò esclude (f) ed anche (b) (secondo la quale si avrebbe invece $v_F/v_n \leq \frac{1}{3}$). La (d) risulta invece falsa se Mr. Big F parte con Mr. Little N alle sue spalle, ma arbitrariamente vicino, e termina con Mr. Little N di fronte, ancora arbitrariamente vicino; in tal caso infatti, se gli incontri sono k, lo spazio $\Delta s'_N$ percorso da Mr. Little N nel sistema di riferimento di Mr. Big F è vicino quanto si vuole a $(k+1)\ell$, dunque per le disuguaglianze sopra riportate si ottiene v_F/v_N arbitrariamente vicino a $\frac{n}{(k-n-1)}$, che è maggiore di $\frac{n}{(k-n)}$. In conclusione l'unica risposta giusta è la (e).

Quesito 13. Se $a \leq b$ sono interi positivi tali che $2012 = ab - a - b = (a-1)(b-1) - 1$, allora $(a-1)$ e $(b-1)$ dividono 2013. D'altra parte $2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$, dunque le uniche possibilità sono

$$\begin{aligned} a-1 &= 1, & b-1 &= 2013 \\ a-1 &= 3, & b-1 &= 11 \cdot 61 \\ a-1 &= 11, & b-1 &= 3 \cdot 61 \\ a-1 &= 3 \cdot 11, & b-1 &= 61 \end{aligned}$$

La risposta dunque è **4**.

Quesito 14. Sia d_n la distanza di Alice dall'origine dopo l'n-mo passo. Se la Strega fa muovere Alice sempre nella direzione che lo distanzia il più possibile dal bordo del giardino, tra le due possibili, d_{n+1} sarà sempre inferiore o uguale all'ipotenusa di un triangolo rettangolo di cateti di lunghezza d_n ed 1: cioè

$$d_{n+1} \leq \sqrt{d_n^2 + 1}$$

Poiché $d_1 = 1$, segue per induzione che $d_n \leq \sqrt{n}$. Poiché $(4,5)^2 = 20,25$ Alice sicuramente non può uscire con $n = 20$ passi. D'altronde, scegliendo di muoversi sempre in direzione tangente al cerchio centrato nel centro del giardino e passante per la sua posizione, Alice può far sì che la sua distanza al passo $(n+1)$-mo sia precisamente $d_{n+1} = \sqrt{n}$, massimizzando la sua distanza dal centro ad ogni passo. Seguendo tale strategia, Alice esce effettivamente dal giardino con $n = 21$ passi, dal momento che $(4,5)^2 < 21$.
La risposta giusta è quindi **21**.

Quesito 15. Immaginando che la casella in alto a sinistra sia bianca, è immediato osservare che le caselle bianche (in particolare, la casella in basso a destra) saranno sempre occupare da numeri dispari, e quelle nere da numeri pari. Inoltre, il minimo percorso per raggiungere la casella in basso a destra dalla casella in alto a sinistra conta almeno 6 passi orizzontali e 6 passi verticali, quindi solo i numeri dispari superiori o uguali a 13 possono essere collocati nella casella in basso a destra. Mostriamo infine che ogni numero dispari superiore o uguale a 13 può effettivamente essere collocato nella casella in basso a destra, seguendo un opportuno cammino. Un cammino del tipo destra$*$6 (cioè sei volte a destra) e poi giù$*$6 (sei volte giù), seguito da un cammino che riempie a piacere la scacchiera libera 6×6 restante, permette di collocare il 13.
Per collocare un numero dispari n compreso tra 15 e 25 si può fare un cammino del tipo:

$$\text{giù} * \left(\frac{n-13}{2}\right), \text{ destra, su} * \left(\frac{n-13}{2}\right), \text{ destra} * 5, \text{ giù} * 6$$

seguito da un cammino ottenuto "tenendo sempre la destra" rispetto alla direzione in cui ci si muove (senza ripassare per le caselle già occupate), per riempire le caselle restanti.
Per collocare un numero dispari n compreso tra 27 e 37 si può fare il cammino:

$$\text{giù} * 6, \text{ destra, su} * 6, \text{ destra, giù} * \left(\frac{n-25}{2}\right), \text{ destra, su} * \left(\frac{n-25}{2}\right), \text{ destra} * 3, \text{ giù} * 6$$

seguito quindi da un cammino ottenuto tenendo sempre la destra nelle caselle vuote restanti.
Per collocare infine un numero dispari n compreso tra 39 e 49 si può fare il cammino:

$$\text{giù}*6, \text{ destra, su}*6, \text{ destra, giù}*6, \text{ destra, su}*6, \text{ destra, giù}*\left(\frac{n-37}{2}\right), \text{ destra, su}*\left(\frac{n-37}{2}\right), \text{ destra, giù}*6$$

e ancora riempire le caselle restanti tenendo la destra. In conclusione, possono essere collocati nella casella in basso a destra tutti e soli i numeri dispari compresi tra 13 e 49: questi sono, in totale, **19**.