PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA – SEZIONE DI ROMA

GARA INDIVIDUALE ALLA SAPIENZA

Roma, 19 aprile 2013

Dipartimento di Matematica,
Facoltà di Scienze MM.FF.NN.,
Sapienza Università di Roma.

Con il sostegno di: Unione Matematica Italiana, Progetto Lauree Scientifiche, CARFID.

Salvo avviso contrario, ogni esercizio fornisce un punteggio compreso tra 0 e 10 punti

Quesito 1. Nel piano Euclideo sono dati 7 punti distinti non appartenenti tutti ad una medesima retta: dimostrare o confutare l'affermazione che esiste sempre una retta che contiene esattamente 2 tali punti.

Quesito 2. Consideriamo la successione definita per ricorrenza

$$a_n = a_{n-1} + 3a_{n-2} + a_{n-3}; \qquad a_0 = a_1 = a_2 = 1\,.$$

Calcolare il resto della divisione di a_{2013} per 7.

Quesito 3. Calcolare il massimo dell'espressione $\sqrt{ab^2c^3}$, sapendo che a, b, c variano tra i reali positivi tali che $a + b + c = 3$.

Quesito 4. Un flipper esagonale funziona nella seguente maniera: una pallina posta in un qualunque vertice dell'esagono viene lanciata, ad ogni secondo, con probabilità $\frac{1}{2}$ in senso orario e probabilità $\frac{1}{2}$ in senso antiorario, raggiungendo istantaneamente uno dei due vertici adiacenti. Indichiamo con P_n la probabilità che, dopo n secondi, la pallina abbia visitato almeno una volta tutti i vertici dell'esagono. Si dimostri:

1. $P_{49} > \frac{1}{2}$, oppure che
2. $P_{75} > \frac{1}{2}$.

(Chiaramente il primo punto implica il secondo, che essendo più facile da dimostrare fornisce un punteggio ridotto da 10 a 8 punti.)

Il prossimo quesito non dà punteggio e viene considerato al solo fine di risolvere eventuali situazioni di ex-aequo.

Quesito Jolly. Consideriamo la trasformazione T che ad ogni terna (a, b, c) di numeri reali positivi associa la terna

$$\left(ab, bc, \frac{1}{a^2b^2}\right).$$

Mostrare che se partiamo da una terna diversa da $(1, 1, 1)$ non troveremo mai la terna originaria comunque si iteri l'applicazione T.