Roma, 6 marzo 2013

PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA – SEZIONE DI ROMA

GARA A SQUADRE

Dipartimenti di Matematica delle Università
Sapienza, Tor Vergata, Roma Tre

con il sostegno di:
Unione Matematica Italiana,
Progetto Lauree Scientifiche, CARFID

Quesito 1. Per quanti valori dell'intero strettamente positivo n l'espressione $\frac{4n+85}{n+5}$ è un intero positivo?

(A) nessuno
(B) 1
(C) 2
(D) 3
(E) 4
(F) infiniti

Quesito 2. Batman, Robin e Catwoman corrono per le strade di Gotham City con le loro potenti moto. La moto di Batman viaggia a una velocità doppia di quella di Catwoman e il tempo che impiega Robin per attraversare il Robert Kane Memorial Bridge è uguale alla somma dei tempi che impiegano Batman e Catwoman per percorrere il medesimo ponte. Ad uno stesso istante Batman e Robin imboccano i due estremi dell'Old Steam Tunnel, lungo 736 metri. Quanti metri percorre Batman prima di scontrarsi con Robin? (Si suppone che tutti viaggiano a velocità costante.)

(A) $490,\overline{6}$
(B) 516
(C) 532
(D) 552
(E) 560
(F) 588,8

Quesito 3. Quanti sono gli interi di cinque cifre divisibili per 3 che hanno 6 come cifra mediana?

(A) 300
(B) 3000
(C) 3001
(D) 3333
(E) 3334
(F) 33333

Quesito 4. Sia $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ un polinomio a coefficienti interi e con tre radici intere distinte. Quante soluzioni intere può avere, al massimo, l'equazione $P(x) = 4$?

(A) nessuna
(B) 1
(C) 2
(D) 3
(E) 3 se $c < 0$ e 2 se $c \geq 0$
(F) nessuna delle precedenti

Quesito 5. Viaggiamo su un cilindro rotondo di raggio R. Si tratta del cilindro ottenuto ruotando la retta ℓ attorno ad una fissata parallela m a distanza R. I meridiani del cilindro sono le rette (generatrici) ottenute dalle successive rotazioni di ℓ, concordemente orientati secondo una direzione sud-nord; i paralleli del cilindro sono le circonferenze descritte dai singoli punti di ℓ, concordemente orientati secondo una direzione est-ovest. A partire da un dato punto P di ℓ, che possiamo pensare come il nostro meridiano di Greenwich, ci si muove sul cilindro percorrendo una rotta nord-est che forma un angolo costante di 45 gradi con i meridiani. A quale altezza si ripasserà per la prima volta sul meridiano di P?

(A) πR
(B) $2\pi R$
(C) $3\pi R$
(D) $\sqrt{\pi} R$
(E) $\sqrt{2}\pi R$
(F) nessuna delle altezze precedenti

Quesito 6. Nel piano sono dati due punti distinti P, Q e si considerano:

- la circonferenza $\mathcal{C}$ avente come diametro il segmento PQ;

- un triangolo isoscele $T = \triangle PQR$, di base PQ e terzo vertice R, scelto tra i due con tale base che sono inscritti in $\mathcal{C}$;

- la circonferenza $\mathcal{C}'$ di centro R passante per P e Q.

Si denotano:

- con C_1, C_2 gli archi di $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ di stessi estremi P, Q e che rispetto al diametro PQ si trovano dalla parte opposta di R;

- con L la lunula delimitata da C_1, C_2.

Quale tra le seguenti affermazioni è vera?

(A) L'area del triangolo T è $\frac{1}{3}$ di quella del cerchio $\mathcal{C}$
(B) La lunghezza del contorno $C_1 \cup C_2$ della lunula L uguaglia il perimetro del triangolo T
(C) Le aree del triangolo T e della lunula L sono uguali
(D) L'area della lunula L uguaglia l'area della regione ottenuta togliendo il triangolo T dal semidisco D delimitato dal diametro PQ e dalla semicirconferenza $\overset{\frown}{PRQ}$ di $\mathcal{C}$ opposta a C_1
(E) La lunghezza del contorno del semidisco D uguaglia la somma delle lunghezze dell'arco C_2 e dei segmenti PR, PQ.
(F) Nessuna delle precedenti

Quesito 7. Sia T un triangolo isoscele di lati 65, 65 e x. Per quanti valori reali di x l'area di T è un numero intero strettamente positivo?

(A) nessuno
(B) 8
(C) 64
(D) 129
(E) 4224
(F) infiniti

Quesito 8. Si considerino 4 interi consecutivi. Sia P il loro prodotto e S la loro somma. Quali di queste proprietà è falsa?

(A) P è sempre divisibile per 8
(B) P è sempre divisibile per 6
(C) $P+1$ è sempre un quadrato perfetto
(D) S non è mai divisibile per 4
(E) Il massimo comun divisore di P ed S è sempre 2
(F) $P \times S$ è sempre divisibile per 10

Quesito 9. Alfred, Batgirl, Catwoman, Deadshot, Enigmista, Helena, Joker e Mister Freeze vanno a cena insieme. Arrivando, ognuno di loro stringe la mano a qualcuno degli altri (non necessariamente a tutti, e a nessuno più di una volta). Alla fine della serata, ognuno ricorda quante mani ha stretto, e Mister Freeze compila una lista con le risposte: qual è fra queste l'unica lista possibile?

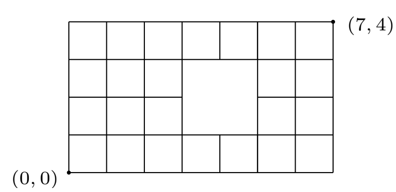
(A) $(0, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4)$
(B) $(1, 2, 3, 4, 4, 6, 6, 7)$
(C) $(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$
(D) $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$
(E) $(1, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 3)$
(F) $(0, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3)$

Quesito 10. Considerate un cubo di lato 1 riempito per metà di acqua. Ruotatelo in modo che la diagonale del cubo sia ortogonale alla superficie di appoggio, ottenendo quindi come unico punto di appoggio un vertice del cubo. A che altezza arriva l'acqua? Che forma geometrica assume la superficie di acqua?

(A) $\sqrt{3}/2$, triangolo
(B) $\sqrt{2}$, quadrilatero
(C) $\sqrt{2}/3$, esagono
(D) $\sqrt{3}/2$, esagono
(E) $\sqrt{2}$, triangolo
(F) $\sqrt{2}/3$, quadrilatero

Quesito 11.

A Penguin piace andare dalla sua dimora a Gotham City's East End facendo ogni giorno un percorso differente nella rete fognaria di Gotham: i possibili canali sono rappresentate in figura. Sapendo che la sua dimora è in $(0, 0)$, Gotham City's East End è in $(7, 4)$, e che Penguin si sposta sempre di un'unità verso est o di un'unità verso nord, quanti sono i possibili percorsi da casa a Gotham City's East End?



(A) 330
(B) 280
(C) 180
(D) 150
(E) 215
(F) 305

Quesito 12. In un cerchio di raggio r tracciamo 4 linee di lunghezza t, in modo tale da dividere il cerchio in 5 regioni di area uguale, una delle quali è un quadrato di lato d, come descritto in Figura 1. Il rapporto t/d è uguale a:

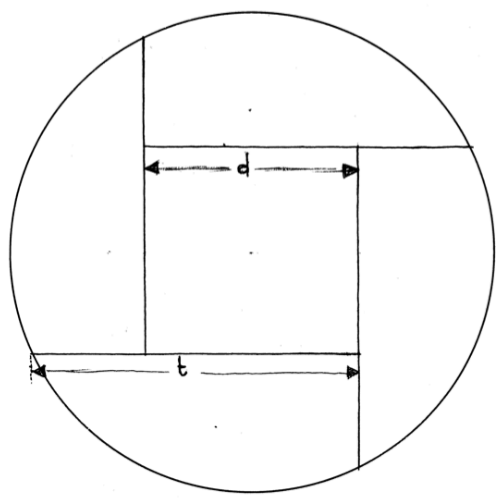


FIGURA 1.

(A) $\sqrt{2}$
(B) 2
(C) $\frac{1}{4}+\sqrt{2\sqrt{\frac{\pi}{10}}+\frac{1}{2}}$
(D) $\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{5}{\pi}-\frac{1}{4}}$
(E) $\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{5}{\pi}+\frac{\pi}{5}}$
(F) $\frac{1}{2}+\sqrt{5\pi}$

Quesito 13. Alle gare di Wayne Manor di corsa, nuoto e lancio del libro partecipano 100 concorrenti. Per ciascuna gara viene compilata una classifica senza posizioni di ex-aequo e riceve in premio un gelato chi si classifica tra i primi 50 in almeno due gare su tre. Quanti possono essere, al massimo, i premiati?

Quesito 14. Catwoman e Batman tirano n volte un dado tetraedrico, cioè un dado con quattro facce uguali, tutte equiprobabili, con i numeri da 1 a 4. Catwoman vince se escono almeno una volta sia l'1 sia il 2, altrimenti vince Batman. Qual è il minimo numero n di lanci affinché Catwoman sia sicuramente favorita nel gioco?

Quesito 15. Riddler sta per far saltare in aria Gotham City, ma ha lasciato una scia di indizi a Batman: $1, 3, 4, 5, 7, 9, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 19, \ldots$, in cui gli interi assenti, cioè $2, 6, 8, 10, 14, 18, \ldots$, sono esattamente quelli doppi dei presenti. Qual è il 2013–esimo numero presente della serie che Batman deve trovare prima che tutta la città esploda?