PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA – SEZIONE DI ROMA

GARA INDIVIDUALE ALLA SAPIENZA

Roma, 19 aprile 2013

Dipartimento di Matematica,
Facoltà di Scienze MM.FF.NN.,
Sapienza Università di Roma.

Con il sostegno di: Unione Matematica Italiana, Progetto Lauree Scientifiche, CARFID.

Quesito 1. Nel piano Euclideo sono dati 7 punti non appartenenti tutti ad una medesima retta: dimostrare o confutare l'affermazione che esiste sempre una retta che contiene esattamente 2 tali punti.

Soluzione. Sia $\mathcal{G}$ l'insieme dei 7 punti. Se 4 dei sette punti di $\mathcal{G}$, indicati con P_1, P_2, P_3, P_4, sono allineati e Q è un punto fuori della loro retta, allora almeno una delle rette r_1, r_2, r_3, r_4 congiungenti Q rispettivamente con P_1, P_2, P_3, P_4 deve contenere esattamente 2 punti di $\mathcal{G}$ (Q e uno dei punti P_i), altrimenti i punti di $\mathcal{G}$ sarebbero complessivamente almeno 8+1, quindi più di 7.

Resta da escludere che possa avverarsi il caso di un insieme $\mathcal{G}$ di 7 punti tale che comunque se ne considerano 2 esiste esattamente un terzo punto di $\mathcal{G}$ con essi allineato. Infatti in tal caso si avrebbe che fra i 7 punti di $\mathcal{G}$ esistono 3 punti allineati P_1, P_2, P_3, con P_2 compreso tra P_1 e P_3; prendiamo un quarto punto Q non allineato con P_1, P_2, P_3. I rimanenti 3 punti R_1, R_2, R_3 di $\mathcal{G}$ si trovano rispettivamente sulle rette QP_1, QP_2, QP_3. Basta adesso osservare che le tre rette R_1R_2, P_1R_2 e R_1P_2 intersecano la retta QP_3 tre punti distinti e diversi da Q; pertanto almeno uno di essi deve essere diverso da Q, P_3, R_3 e quindi la retta corrispondente contiene esattamente 2 dei 7 punti.

Menzioniamo che il risultato provato si inquadra in uno assai più generale, noto come il **teorema di Sylvester-Gallai**: Data nel piano Euclideo una collezione $\mathcal{G}$ di punti in numero finito, maggiore di 2, (ad esempio centomila punti) non appartenenti ad una stessa retta, esiste sempre una retta che ne contiene esattamente 2. La dimostrazione seguente non è eccessivamente complicata. Per ogni retta s congiungente 2 punti di $\mathcal{G}$ e per ogni punto Q di $\mathcal{G}$ non appartenente ad s può considerarsi la distanza $d = d(Q, s)$ di Q da s. Se s e Q sono tali che d è minima allora su s vi sono esattamente 2 punti di $\mathcal{G}$, diciamo P_1, P_2, che si trovano da parti opposte rispetto al piede H della perpendicolare da Q a s, uno di essi coincidendo eventualmente con H. Infatti se, ad esempio, un punto R di s si trova tra H e P_1 la distanza tra R e la retta per P_1, Q è minore della distanza di Q da s.

Quesito 2. Consideriamo la successione definita per ricorrenza

$$a_n = a_{n-1} + 3a_{n-2} + a_{n-3}; \qquad a_0 = a_1 = a_2 = 1 \,.$$

Calcolare il resto della divisione di a_{2013} per 7.

Soluzione. Indichiamo con b_n la classe di resto modulo 7 di a_n. Si ha $b_0 = 1$, $b_1 = 1$, $b_2 = 1$, $b_3 = 5$, $b_4 = 2$, $b_5 = 4$, $b_6 = 1$, $b_7 = 1$, $b_8 = 1$. Poiché b_0, b_1, b_2 sono rispettivamente uguali a b_6, b_7, b_8 ne segue che per ogni $n \geq 6$ si ha $b_n = b_{n-6}$. Siccome $2013 = 335 \cdot 6 + 3$ si ha che $b_{2013} = b_3 = 5$.

Quesito 3. Calcolare il massimo dell'espressione $\sqrt{ab^2c^3}$, sapendo che a, b, c variano tra i reali positivi tali che $a + b + c = 3$.

Soluzione. Il massimo di $\sqrt{ab^2c^3}$ si ottiene quando il prodotto

$$a\,\frac{b}{2}\,\frac{b}{2}\,\frac{c}{3}\,\frac{c}{3}\,\frac{c}{3}$$

assume valore massimo, con a, b, c numeri reali positivi tali che

$$a + \frac{b}{2} + \frac{b}{2} + \frac{c}{3} + \frac{c}{3} + \frac{c}{3} = 3 \,.$$

Segue dalla disuguaglianza media aritmetica≥media geometrica che il prodotto di numeri reali positivi a somma costante assume il massimo valore quando i numeri sono tutti uguali. Ricordiamo qui che se ne può dare la dimostrazione riducendosi al caso del prodotto ab di due numeri positivi, di somma costante $a + b = k$. Se, ad esempio, $b > a$ il prodotto non può essere massimo: basta prendere $a' = a + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2}, b' = b - \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2}$, per i quali si ha ancora $a' + b' = k$, e risulta $a'b' > ab$ poichè $a'b' - ab = \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 > 0$. Ora, tornando al posto quesito, possiamo dedurre che il massimo si ottiene quando a, b, c assumono i valori

$$a = \frac{1}{2}, \quad b = 1, \quad c = \frac{3}{2}$$

e quindi il massimo di $\sqrt{ab^2c^3}$ è uguale a $\sqrt{\frac{3^3}{2^4}} = \frac{3}{4}\sqrt{3}$.

Quesito 4. Un flipper esagonale funziona nella seguente maniera: una pallina posta in un qualunque vertice dell'esagono viene lanciata, ad ogni secondo, con probabilità $\frac{1}{2}$ in senso orario e probabilità $\frac{1}{2}$ in senso antiorario, raggiungendo istantaneamente uno dei due vertici adiacenti. Indichiamo con P_n la probabilità che, dopo n secondi, la pallina abbia visitato almeno una volta tutti i vertici dell'esagono. Si dimostri che:

$$P_{49} > \tfrac{1}{2}, \text{ oppure che } P_{75} > \tfrac{1}{2}.$$

(Chiaramente il primo punto implica il secondo, che essendo più facile da dimostrare fornisce un punteggio ridotto da 10 a 8 punti.)

Soluzione. Innanzitutto risulta $P_5 = \frac{2}{2^5} = \frac{1}{16}$, corrispondente ai due percorsi che coprono i vertici dell'esagono in tempo minimo (orario o antiorario). Quindi la probabilità di non visita dopo 5 secondi è $\frac{15}{16}$. Dopo 5×2 secondi la probabilità di non visita è certamente minore di $\left(\frac{15}{16}\right)^2$. Infatti dopo 5 secondi si ripropone "sostanzialmente" la situazione di partenza, modulo un eventuale cambiamento del vertice di partenza (il moto della pallina non ha memoria dei salti precedenti, continuando a saltare con probabilità $\frac{1}{2}$ in un verso o nell'altro). Tuttavia la probabilità di non visita dopo 10 secondi è minore di $\left(\frac{15}{16}\right)\left(\frac{15}{16}\right)$, in quanto da 5 a 10 secondi i vertici (almeno uno) da "non visitare" non sono più arbitrari (come da 0 a 5 secondi), dovendo almeno uno di essi coincidere con un vertice non visitato tra 0 e 5 secondi. Questo rende la probabilità di non visita tra 5 e 10 secondi minore di $\frac{15}{16}$. Continuando in questo modo si ottiene che $1 - P_{5n} < \left(\frac{15}{16}\right)^n$, cioè $P_{5n} > 1 - \left(\frac{15}{16}\right)^n$. Si tratta quindi di verificare che

$$P_{75} = P_{5\times 15} > 1 - \left(\frac{15}{16}\right)^{15} > \frac{1}{2}.$$

L'ultima disuguaglianza è equivalente a $\left(\frac{16}{15}\right)^{15} > 2$, che scritta nella forma $(1+a)^n > 2$ con $a = \frac{1}{15}$ e $n = 15$, risulta verificata se si fa uso della semplice disuguaglianza $(1+a)^n > 1 + na$ (dimostrarla per induzione!), che nel nostro caso dà $\left(\frac{16}{15}\right)^{15} > 1 + 15\frac{1}{15} = 2$. La dimostrazione che $P_{49} > \frac{1}{2}$ usa lo stesso argomento con l'osservazione iniziale che $P_7 \geq \frac{1}{8}$, ossia che esistono almeno sedici cammini utili (sui 2^7 possibili) a visitare ogni vertice in 7 secondi: 10 sono ottenuti andando in direzione oraria (o antioraria) compiendo solo due dietro-front successivi in uno dei 5 qualsiasi vertici, altri 2 ottenuti andando prima in direzione oraria (o antioraria) e poi facendo un unico dietro-front dopo il secondo vertice, infine altri 4 facendo un unico dietro-front dopo il primo vertice, quindi un dietro/front, oppure nessun dietro front, all'ultimo vertice.

Quesito Jolly. Consideriamo la trasformazione T che ad ogni terna (a, b, c) di numeri reali positivi associa la terna

$$\left(ab, bc, \frac{1}{a^2b^2}\right).$$

Mostrare che se partiamo da una terna diversa da $(1, 1, 1)$ non troveremo mai la terna originaria comunque si iteri l'applicazione T.

Soluzione. Detto $T^n(a, b, c) = (x_n, y_n, z_n)$, notiamo che $z_n = 1/x_n^2$ per ogni n; quindi, affinché una terna (a, b, c) sia mandata in se stessa da una iterazione di T è necessario che $c = a^{-2}$. Dunque, il problema equivale a mostrare che, considerando l'applicazione S che ad una coppia di numeri (a, b) associa la coppia (ab, ba^{-2}), se si parte da una coppia diversa da $(1, 1)$ non troveremo mai la coppia originaria comunque si iteri l'applicazione S. Passando ai logaritmi la trasformazione S diventa la trasformazione Q che ad ogni coppia di numeri (x, y) associa la coppia $(x + y, y - 2x)$. Basta adesso osservare che ogni applicazione di Q moltiplica per 3 la quantità $2x^2 + y^2$.

Autori dei quesiti: Stefano Marchafava (1), Marco Isopi (2), Andrea Sambusetti (3), Guido Cavallaro (4), Marco Manetti (Jolly).