Roma, 6 marzo 2013

PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA – SEZIONE DI ROMA

GARA A SQUADRE

Dipartimenti di Matematica delle Università
Sapienza, Tor Vergata, Roma Tre

con il sostegno di:

Unione Matematica Italiana,
Progetto Lauree Scientifiche, CARFID

SOLUZIONI[1]

Quesito 1. Risposta (C): 2 valori.

Osserviamo innanzitutto che vale la relazione:

$$\frac{4n+85}{n+5} = \frac{4(n+5)-20+85}{n+5} = 4 + \frac{65}{n+5} = 4 + \frac{5\times 13}{n+5}.$$

Affinchè questa espressione risulti un intero positivo, occorre e basta che $(5 \times 13)/(n+5)$ sia un intero positivo, e questo si ha (ricordiamo che $n > 0$) per $n+5 = 13$ e $n+5 = 65$, ovvero $n = 8$ e $n = 60$.

Quesito 2. Risposta (D): 552.

La risposta corretta è 552. Indicando con b, c, r le velocità di Batman, Catwoman e Robin rispettivamente, si hanno le relazioni

$$b = 2c, \qquad \frac{1}{r} = \frac{1}{c} + \frac{1}{b},$$

dalle quali si ricava $b = 3r$. Nel tempo che intercorre dall'ingresso nel tunnel e il momento dello scontro, Batman percorre il triplo dei metri percorsi da Robin, che sono dunque i 3 quarti di 736, ossia 552 metri.

Quesito 3. Risposta (B): 3000.

Come è noto un numero è divisibile per 3 se e solo se lo è la somma delle sue cifre Quindi un intero di cinque cifre che ha 6 come cifra mediana è divisibile per 3 se e solo se lo è l'intero di quattro cifre ottenuto cancellando la cifra mediana. Ci sono 9000 interi di quattro cifre e un terzo di questi (1002, 1005, ..., 9999) è divisibile per 3. Quindi ci sono 3000 interi di cinque cifre divisibili per 3 che hanno 6 come cifra mediana.

Quesito 4. Risposta (B): al massimo 1 soluzione.

Siano $x_1 < x_2 < x_3$ le radici di $P(x)$. Per il teorema di Ruffini

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3).$$

Osserviamo che per ogni valore intero di x i tre fattori sono interi e tali che

$$(x - x_1) > (x - x_2) > (x - x_3).$$

Cerchiamo radici intere di $P(x) = 4$. I divisori interi di 4 sono ± 1, ± 2, ± 4, e i prodotti di tre di tali divisori (distinti) che diano 4 sono

$$(1)(-1)(-4) \qquad \text{e} \qquad (2)(-1)(-2).$$

[1] Il presente file può essere scaricato dalla pagina web `www.mat.uniroma1.it/didattica/olimpiadi/`

Quindi $P(x)$ può valere 4 soltanto nei due casi in cui si abbia

$$x - x_1 = 1, \quad x - x_2 = -1, \quad x - x_3 = -4$$

e

$$x - x_1 = 2, \quad x - x_2 = -1, \quad x - x_3 = -2.$$

Osserviamo ora che, fissata la terna x_1, x_2, x_3, la possibiltà di avere

$$x = x_1 + 1 = x_2 - 1 = x_3 - 4$$

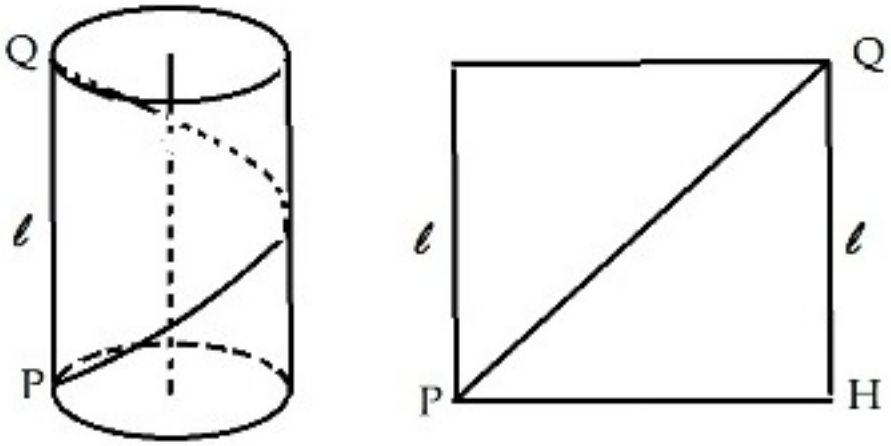
esclude il secondo caso, ovvero

$$x = x_1 + 2 = x_2 - 1 = x_3 - 2$$

e viceversa. Quindi la soluzione è, al più, una.

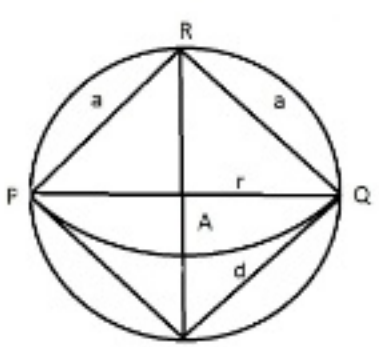
Quesito 5. Risposta (B): $2\pi R$.

Se pensiamo di tagliare il cilindro lungo ℓ possiamo, senza alterare le distanze sulla superficie, srotolarlo e applicarlo su una striscia del piano tangente lungo ℓ stessa, compresa tra ℓ e una sua parallela ℓ' distante $2\pi R$. Fatto ciò la linea descritta seguendo la detta rotta viene a coincidere con un segmento rettilineo che incontra ℓ' in un punto Q a distanza $2\pi R$ dal piede della perpendicolare da P a ℓ', come immediatamente risulta dall'osservare che il triangolo PQH è isoscele e rettangolo in H.



Quesito 6. Risposta (C): l'area del triangolo e della lunula sono uguali.

Se A è l'area della regione compresa tra l'arco $\overset{\frown}{PQ}$ di $\mathcal{C}'$ e il diametro PQ e a è l'area della regione compresa tra l'arco $\overset{\frown}{RP}$ e la corda RP,



posto $2r = \overline{PQ}$, $d = \overline{RQ}$, si ha $A = \frac{1}{4}$(Area cerchio $\mathcal{C}'$)-(Area T), ovvero

$$A = \frac{1}{4}\pi d^2 - \frac{1}{2}2rr = \frac{1}{4}[\pi d^2 - 4r^2] = \frac{1}{4}[\pi 2r^2 - 4r^2],$$

inoltre

$$2a = \frac{\pi}{2}r^2 - \frac{1}{2}2rr = \frac{1}{4}[2\pi r^2 - 4r^2],$$

quindi $A = 2a$; pertanto il triangolo T e la lunula L, potendosi ottenere togliendo da semidischi uguali regioni di area uguale, hanno uguale area.

Le altre risposte sono errate: infatti

(A) Area$(T) = \frac{1}{2}2r^2 = r^2$, Area$(\mathcal{C}) = \pi r^2$ quindi Area$(T) \neq \frac{1}{3}$Area$(\mathcal{C})$

(B) Lunghezza$(C_1) = \pi r$, Lunghezza$(C_2) = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi r$ quindi

Lunghezza$(C_1 + C_2) = (1 + \frac{\sqrt{2}}{2})\pi r = \left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)\pi r \neq$ Perimetro$(T) = 2r + 2\sqrt{2}r$

(D) Area$(L) = \frac{1}{2}\pi r^2 - \frac{1}{4}[2\pi - 4]r^2 = r^2 \neq 2a = \frac{1}{2}r^2(\pi - 2)$

(E) $\overline{PQ}$+Lunghezza$(\overset{\frown}{PRQ}) = (\pi+2)r \quad \neq \quad$ Lunghezza(C_2)+$\overline{PR}$+$\overline{PQ} = \frac{1}{4}2\pi d + 2d = \frac{\sqrt{2}}{2}(\pi+4)r$.

È interessante osservare che il procedimento di *taglia e cuci* utilizzato per dimostrare l'uguaglianza delle aree della luna L e del triangolo T è dovuto a Ipparco di Chio (430 a.C!).

Quesito 7. Risposta (E): 4224.

Una soluzione: L'area del triangolo deve essere un numero intero, perciò

$$A_T = \frac{x}{2}\sqrt{65^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = n$$

con n intero positivo. Quindi

$$n^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 \left(65^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2\right).$$

Poniamo $\frac{x}{2} = t$ (non si richiede che x sia intero).

$$t^4 - 65^2 t^2 + n^2 = 0,$$

e risolviamola ponendo $t^2 = \xi$.

$$\xi = \frac{65^2 \pm \sqrt{65^4 - 4n^2}}{2} \tag{1}$$

e affinchè abbia soluzioni reali

$$65^4 - 4n^2 \geq 0,$$

da cui

$$2n \leq 65^2 = 4225, \qquad n \leq 2112,5$$

quindi abbiamo 2112 valori possibili per l'intero n, e $2112 \times 2 = 4224$ soluzioni possibili (per via del $\pm$ nell'eq. (1)) per ξ, ovvero x.

Un'altra soluzione: Il valore per x può variare tra 0 e 130. Per entrambi questi valori l'area vale 0. Il valore massimo dell'area è raggiunto col triangolo rettangolo e vale $\frac{65^2}{2} = 2112.5$. Quindi esistono 2112 valori distinti di x per cui il triangolo acutangolo di lati 65, 65, x ha area intera. E ci sono altrettanti valori distinti di x per cui il triangolo ottusangolo di lati 65, 65, x ha area intera.

Quesito 8. Risposta **(E)**: massimo comun divisore tra P ed S è sempre 2: falso.

L'unica affermazione falsa tra quelle elencate è la **(E)**. Per dimostrare che la **(E)** è falsa è sufficiente considerare i 4 interi consecutivi 3,4,5,6, il cui prodotto è 360 e la cui somma è 18; si noti infatti che il massimo comun divisore di 360 e 18 è 18. Dimostriamo per completezza che le altre affermazioni sono vere. Consideriamo i 4 interi consecutivi $n, n+1, n+2, n+3$, il cui prodotto è $P = n(n+1)(n+2)(n+3) = n^4+6n^3+11n^2+6n$ e la cui somma è $S = n+(n+1)+(n+2)+(n+3) = 4n+6$.

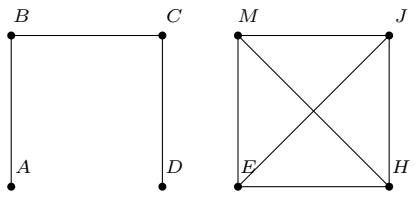
- Affermazione **(A)**. Dato che i quattro interi $n, n+1, n+2, n+3$ sono consecutivi, due di essi sono pari ed uno di essi è divisibile per 4: quindi P è sempre divisibile per 8.
- Affermazione **(B)**. Dato che i quattro interi $n, n+1, n+2, n+3$ sono consecutivi, almeno uno di essi è divisibile per 3. Combinando tale osservazione con il punto (a) si trova che P è sempre divisibile per 24 e, in particolare, per 6.
- Affermazione **(C)**. Usando l'espressione per P riportata sopra si ha che $P+1 = n^4+6n^3+11n^2+6n+1$. Inoltre si verifica immediatamente che $n^4+6n^3+11n^2+6n+1 = (n^2+3n+1)^2$, che dimostra la veridicità della **(C)**.
- Affermazione **(D)**. Usando l'espressione per S riportata sopra, si ha che $S = 4(n+1)+2$ e quindi $S \equiv 2 \pmod 2$ per ogni n.
- Affermazione **(F)**. Dato che i quattro interi $n, n+1, n+2, n+3$ sono consecutivi, i casi in cui uno di essi è divisibile per 5 sono i seguenti: $n \equiv 0 \pmod 5$, oppure $n \equiv 2 \pmod 5$, oppure $n \equiv 3 \pmod 5$, oppure $n \equiv 4 \pmod 5$. Dato che S è sempre divisibile per 2, in tutti questi casi $P \times S$ è divisibile per 10. Invece, nel caso in cui $n = 5k+1$, P non è divisibile per 5; però in questo caso $S = 4(5k+1)+6 = 20k+10$ e quindi S è divisibile per 10. In tutti i casi il prodotto $P \times S$ è divisibile per 10.

Quesito 9. Risposta **(E)**: $(1,1,2,2,3,3,3,3)$.

È facile convincersi del fatto che, se $(a_1, a_2, \ldots, a_8)$ è una lista come sopra e se H è il numero totale di strette di mano scambiate quella sera, si ha

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_8 = 2H.$$

La somma degli elementi di ogni lista deve quindi essere un numero pari: questo esclude le liste **(A)**, **(B)** e **(F)**. La lista **(D)**, $(1,2,3,4,5,6,7,8)$, è esclusa perché nessuno può avere stretto 8 mani; la lista **(C)**, $(0,1,2,3,4,5,6,7)$ viene esclusa perché 0 e 7 non possono entrambi far parte di una lista accettabile: se qualcuno non ha stretto la mano a nessuno, non ci può essere qualcun altro che l'ha stretta a tutti. Resta la lista numero 5, $(1,1,2,2,3,3,3,3)$, che è l'unica possibile: un esempio di una sua realizzazione è schematizzato in figura.



Quesito 10. Risposta **(D)**: $\sqrt{3}/2$, esagono.

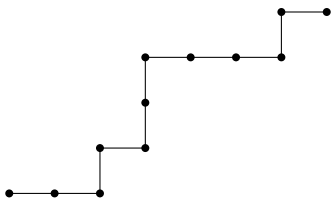
Per motivi di simmetria la superficie dell'acqua passa per il punto medio della diagonale del cubo. Essendo la diagonale ortogonale al piano di appoggio, l'altezza dell'acqua coincide con la metà della lunghezza della diagonale del cubo, quindi $\sqrt{3}/2$.
La superficie dell'acqua può avere intersezione con 3 o 6 facce del cubo. Il caso in cui interseca solo 4 facce non è ammissibile. Le configurazioni ammissibili sono:

1) la superficie interseca solamente tre facce del cubo, quelle che hanno in comune il vertice che è sul piano di appoggio (Facce Basse),
2) la superficie interseca solamente tre facce del cubo, quelle che non hanno in comune il vertice che è sul piano di appoggio (Facce Alte),
3) la superficie interseca le 3 Facce Basse e le 3 Facce Alte.

Se la superficie dell'acqua avesse intersezione con solo le Facce Basse o solo le Facce Alte, si perderebbe la simmetria rispetto il cambiamento del verso dell'asse z. Quindi la superficie dell'acqua ha intersezione sia con le 3 Facce Basse che con le 3 Facce Alte. Otteniamo dunque che la superficie ha una forma esagonale.

Quesito 11. Risposta **(C)**: 180 percorsi.

Il numero totale di percorsi in una griglia senza il buco è pari a $330 = \binom{11}{7}$. Infatti ogni percorso è fatto di 11 tratti, 7 verso est e 4 verso nord, e per esempio la 11-pla $(e, e, n, e, n, n, e, e, e, n, e)$ rappresenta il percorso



Il numero di queste 11-ple, e quindi il numero di percorsi, è $\binom{11}{7}$, in quanto bisogna scegliere 7 fra gli 11 tratti in cui si andrà a est.

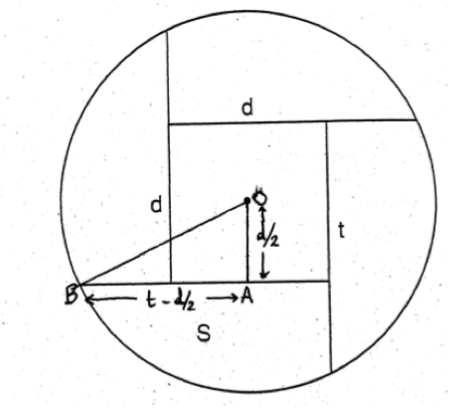
Ora bisogna contare quanti fra questi percorsi passano per il punto $(4, 2)$; i percorsi da $(0, 0)$ a $(4, 2)$ sono $\binom{6}{2}$, quelli da $(4, 2)$ a $(7, 4)$ sono $\binom{5}{2}$, e i percorsi per $(4, 2)$ sono quindi $\binom{6}{2} \cdot \binom{5}{2} = 150$.

Il numero di percorsi possibili per Penguin è quindi pari a $330 - 150 = 180$.

Quesito 12. Risposta **(D)**: $\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{\pi} - \frac{1}{4}}$.

Per determinare il rapporto tra t e d osserviamo quanto segue. La condizione che l'area del quadrato centrale sia uguale a quella della regione S indicate in Figura è

$$d^2 = \frac{\pi}{5} r^2 \tag{2}$$



Inoltre, il triangolo rettangolo OAB ha i cateti di lunghezza $\frac{d}{2}$ e $t-\frac{d}{2}$, e ha l'ipotenusa di lunghezza r. Quindi

$$\frac{d^2}{4}+\left(t-\frac{d}{2}\right)^2=r^2. \tag{3}$$

Combinando la (2) con la (3) troviamo

$$\frac{d^2}{4}+\left(t-\frac{d}{2}\right)^2=\frac{5}{\pi}d^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4}+\left(\frac{t}{d}-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{\pi}, \tag{4}$$

che risolta dà

$$\frac{t}{d}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{5}{\pi}-\frac{1}{4}}. \tag{5}$$

Osservando che, per costruzione, $t>d$, si trova che delle due soluzioni in (5) quella con il segno meno va scartata, e quindi

$$\frac{t}{d}=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{5}{\pi}-\frac{1}{4}}. \tag{6}$$

Quesito 13. Risposta: **75**.

Indicando con x il numero dei partecipanti che si classificano nella parte alta della classifica in tutte le gare e con y il numero dei partecipanti che si classificano nella parte alta della classifica in due gare su tre si ha la disuguaglianza $3x+2y\leq 150$. Siccome $2(x+y)\leq 3x+2y$ si ricava $x+y\leq 75$ e quindi il numero dei premiati non supera 75. Per vedere che è possibile avere una configurazione con 75 premiati dividiamo i 100 partecipanti in 4 squadre di 25, che prendono i nomi delle loro mascotte: cani, foche, scimmie e lombrichi. Supponiamo adesso che: nella gara di corsa i cani guadagnano le prime 25 posizioni e le scimmie le posizioni dal 26 al 50; nella gara di nuoto le foche guadagnano le prime 25 posizioni ed i cani le posizioni dal 26 al 50; nella gara di lancio del libro le scimmie guadagnano le prime 25 posizioni e le foche le posizioni dal 26 al 50. In tale situazione solo i lombrichi non ricevono l'agognato premio.

Quesito 14. Risposta: **5**.

Chiamiamo $P_n(1)$ la probabilità che su n lanci esca almeno una volta l'1, $P_n(2)$ la probabilità che su n lanci esca almeno una volta il 2, e $P_n(1\cup 2)$ la probabilità che su n lanci esca almeno una volta l'1 oppure il 2. Si ha $P_n(1)=1-(3/4)^n=P_n(2)$, mentre $P_n(1\cup 2)=1-(2/4)^n$.
La probabilità $P_n(1\cap 2)$ che su n lanci escano sia l'1 sia il 2 è allora:

$$P_n(1\cap 2)=P_n(1)+P_n(2)-P_n(1\cup 2)=1+(\frac{1}{2})^n-2(\frac{3}{4})^n$$

Si noti che $P_n(1\cap 2)$ è crescente, in quanto è immediato verificare che

$$(\frac{1}{2})^n-2(\frac{3}{4})^n<(\frac{1}{2})^{n+1}-2(\frac{3}{4})^{n+1}<0$$

per ogni $n > 0$. È quindi sufficiente trovare il primo n per il quale

$$P_n(1 \cap 2) = 1 + (\frac{1}{2})^n - 2(\frac{3}{4})^n > 1/2 :$$

questa disuguaglianza è equivalente a

$$3^n < \frac{1}{4}\, 2^n(2 + 2^n),$$

che è verificata a partire da $n = 5$.

Quesito 15. Risposta: **3020**.

Esaminiamo i primi termini:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
presenti	1	3	4	5	7	9	11	12	13	15
assenti	2	6	8	10	14	18	22	24	26	30

I numeri assenti possono essere solo pari (in quanto doppio dei presenti), dunque tutti i dispari sono presenti.

Chiamiamo I un dispari generico. Possiamo dire allora che tutti i numeri della forma $2I$ sono assenti, ma che tutti i numeri della forma $4I$ sono presenti (se $4I$ fosse assente, sarebbe il doppio del presente $2I$, che contraddice l'affermazione precedente). Allo stesso modo, tutti i numeri della forma $8I$ sono assenti, quindi tutti i numeri della forma $16I$ sono presenti (si ragiona come per $4I$), e così via.

Infine la chiave del problema sta nell'osservazione seguente:
I numeri presenti sono gli interi della forma $4^i \times (2j+1)$*, dove* i, j *sono interi naturali qualunque.*

Cerchiamo ora il numero dei presenti fino a 3000.

Poiché il numero di dispari compresi tra 1 e I è $\frac{I+1}{2}$, i presenti da 1 a 3000 sono:

i dispari	da 1	a	2999	sono	1500,
i $4I$	da 4×1	a	$4 \times 749 = 2996$	sono	375,
i $16I$	da 16×1	a	$16 \times 187 = 2992$	sono	94,
i $64I$	da 64×1	a	$64 \times 45 = 2880$	sono	23,
i $256I$	da 256×1	a	$256 \times 11 = 2816$	sono	6,
i $1024I$	da 1024×1	a	$1024 \times 1 = 1024$	sono	1

cioè in totale 1999 presenti fino a 3000 (3000 non è presente). Per ottenere i 14 presenti in più, basta fare un semplice conto degli interi successivi a 3000 presenti nella lista, che sono: 3001, 3003, 3004 (4 per un dispari), 3005, 3007, 3008 (16 per un dispari), 3009, 3011, 3012 (4 per un dispari), 3013, 3015, 3017, 3019 e infine 3020.

Dunque l'intero presente al posto 2013 nella lista è 3020.

Per divertirsi ancora... si può consultare la On-line encyclopedia of integer sequences: si tratta di uno splendido motore di ricerca per successioni di interi. Si trova sul sito http://oeis.org/: inserendo i primi numeri della successione del problema, ovvero $1, 3, 4, 5, 7, 9, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 19, \ldots$, il motore di ricerca delle successioni di interi vi dirà quello che si conosce su tutte le successioni che cominciano per $1, 3, 4, 5, 7, 9, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 19, \ldots$, le loro proprietà, i risultati noti al riguardo, i significati combinatorii, eccetera.